

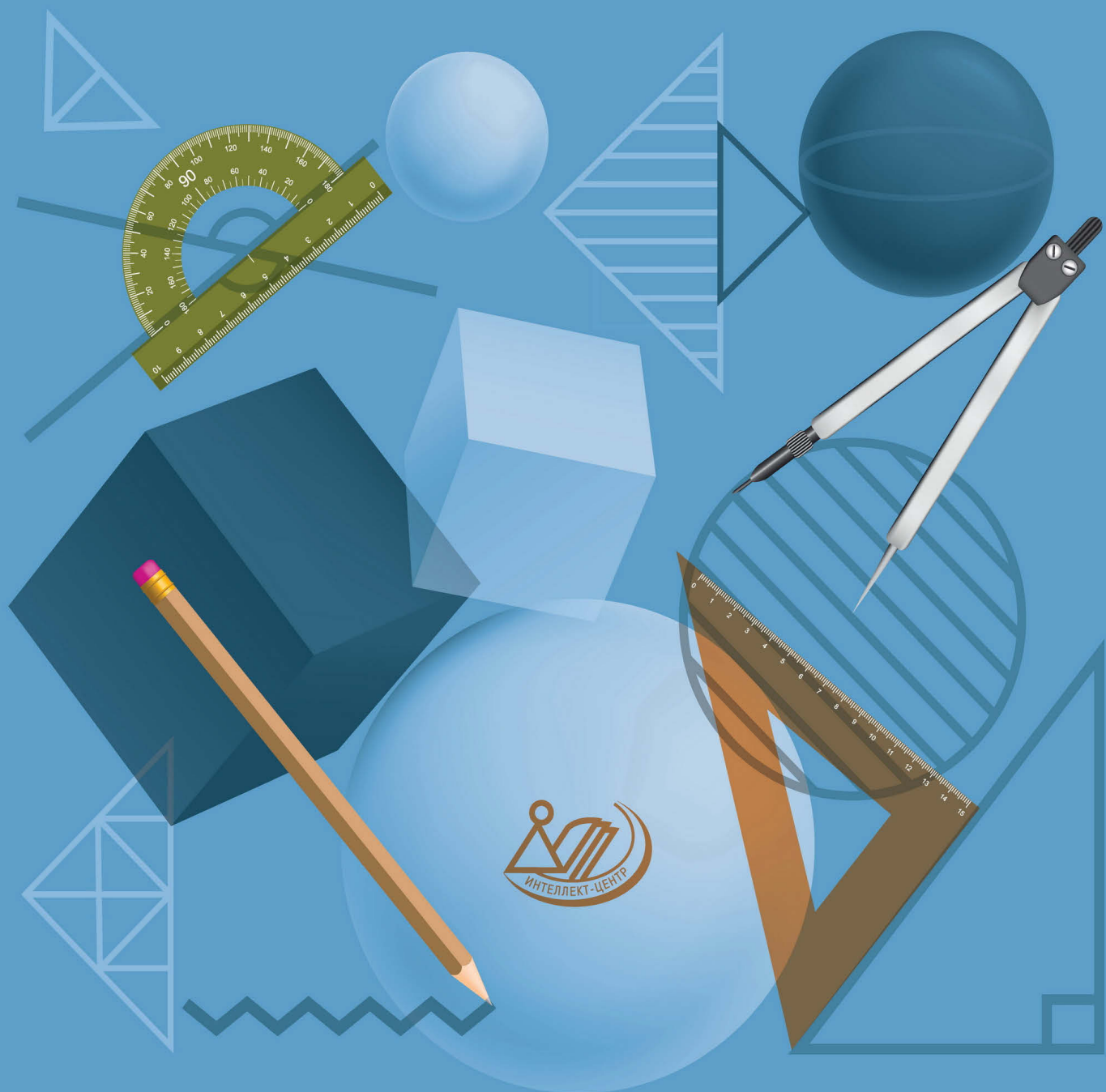
ГЕОМЕТРИЯ

7

ТЕТРАДЬ-ТРЕНАЖЁР

КЛАСС

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ



Т.Л. Ниренбург

ГЕОМЕТРИЯ

7 класс

ТЕТРАДЬ-ТРЕНАЖЁР

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

2-е издание, электронное



Москва
Издательство «Интеллект-Центр»
2025

УДК 514(075.3)
ББК 22.12я721
Н68

Рецензенты:

Е. В. Лукьянова – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа им. П.С. Новикова ИМИИ МПГУ, учитель высшей категории;
Т. Н. Казарихина – кандидат педагогических наук, учитель математики и информатики высшей квалификационной категории, заместитель директора АНО СОШ «Димитриевская», доцент МПГУ

Ниренбург, Т. Л.

Н68 Геометрия. 7 класс. Тетрадь-тренажёр. Углублённый уровень : учебное пособие / Т. Л. Ниренбург. — 2-е изд., эл. — 1 файл pdf : 82 с. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2026. — Систем. требования: Adobe Reader XI либо Adobe Digital Editions 4.5 ; экран 10". — Текст : электронный.
ISBN 978-5-908080-19-4

Тетрадь-тренажёр — это пособие для изучения геометрии в 7 классе по углублённой программе. Задания охватывают все основные темы углублённого курса, для удобства использования все задания представлены в виде таблиц. Выполнять решения можно непосредственно в тетради-тренажёре. Пособие ориентировано на работу по углублённой программе, соответствующей последнему ФГОС с опорой на учебник «Геометрия: 7–9 классы» (Атанасян Л. С. и др.), включённый в Федеральный перечень учебников. Также возможно использование этих материалов с другими учебниками и учебными пособиями по геометрии 7 класса.

Пособие адресовано в первую учителям, работающим по углублённой программе, но будет также полезно репетиторам, учащимся и их родителям.

УДК 514(075.3)
ББК 22.12я721

Электронное издание на основе печатного издания: Геометрия. 7 класс. Тетрадь-тренажёр. Углублённый уровень : учебное пособие / Т. Л. Ниренбург. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2026. — 80 с. — ISBN 978-5-907985-24-7. — Текст : непосредственный.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации.

ISBN 978-5-908080-19-4

© ООО «Издательство «Интеллект-Центр», 2026
© Ниренбург Т. Л., 2025

ПРЕДИСЛОВИЕ

Тетрадь-тренажёр для углублённого изучения геометрии в 7 классе открывает серию пособий для углублённого изучения геометрии в 7, 8, 9 классах. Тетрадь представляет собой пособие по решению задач, предназначенное помочь учащимся освоить углублённую школьную программу по геометрии. Задачи разбиты на пять разделов в соответствии с программой: «Начальные геометрические сведения», «Треугольники», «Параллельные прямые. Соотношения между сторонами и углами треугольника», «Окружности» и «Повторение и обобщение. Задачи на построение». Особое внимание уделяется теме «Окружности», которая полноценно появилась в 7 классе совсем недавно. В каждой теме, и особенно в разделе «Повторение», предлагается много задач на построения циркулем и линейкой, а также – «на глазок» (для развития ощущения правдоподобного чертежа).

В каждом разделе предложены задачи для отработки навыков решения основных типов задач. Для достижения устойчивого результата почти в каждом задании предлагается несколько однотипных задач или несколько разных задач, обыгрывающих один и тот же вопрос.

Данное пособие не заменяет учебник (с большим количеством объяснений теоретических аспектов) и сборники задач, ориентированных на учебники, но оно гармонично дополняет их. Некоторые задания обучающимся по углублённой программе могут показаться простыми. Но для успешного решения более сложных задач навык решения основных типов «простых» задач должен быть доведён почти до автоматизма. В пособие добавлено некоторое количество задач повышенного уровня сложности. Решение этих задач будет полезно для ребят, увлекающихся олимпиадными геометрическими задачами.

Для удобства оформления решений задачи сгруппированы в таблицы. При этом предполагается, что решения будут выполняться непосредственно в этой тетради. Такое оформление упрощает проверку результатов учителем и обучающимся. Все разделы (кроме последнего) содержат теоретические сведения, которые отмечены знаком , задания для

отработки навыков и задания «Проверьте себя» для проверки степени усвоения материала. В некоторых заданиях приведены образцы решения задач (такие задачи выделены серым цветом). К большинству заданий в конце пособия приведены ответы и/или указания к решению. Задания предполагается выполнять последовательно, что способствует достижению лучшего результата. Последний раздел содержит задания на повторение всего курса; почти каждое задание этого раздела – повод для разговора на повторение небольшой темы, изученной в течение учебного года.

При выполнении заданий обучающиеся выполняют большую работу, но при этом предложенный способ оформления решений упрощает учителю проверку результатов. Легко организовать перекрёстную проверку учениками.

Тетрадь-тренажёр удобна в использовании на уроках, для выполнения домашних заданий, для отработки материала учащимися, вынужденно пропустившими занятия. Она поможет также повторить материал 7-го класса при поступлении в профильный 8 класс, а также при подготовке к экзаменам.

НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

ПРЯМЫЕ. ОТРЕЗКИ. РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКАМИ



Важно знать:

- Через любые две точки можно провести только одну прямую.

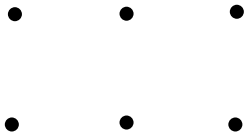
Задание 1. Проведите k прямых так, чтобы через каждую отмеченную точку проходила хотя бы одна прямая, и на каждой прямой было ровно n отмеченных точек.

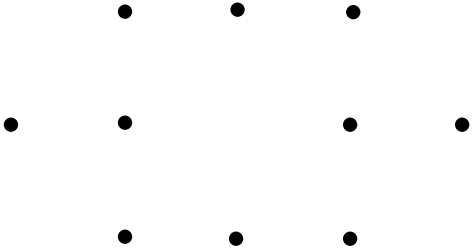
1) $k = 5, n = 2$	2) $k = 4, n = 2$	3) $k = 5, n = 1$	4) $k = 8, n = 3$

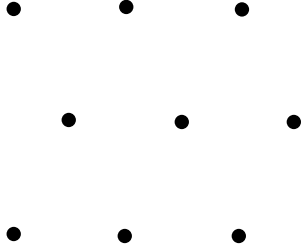
Задание 2. Соедините точки отрезками так, чтобы каждая точка являлась концом ровно одного отрезка.

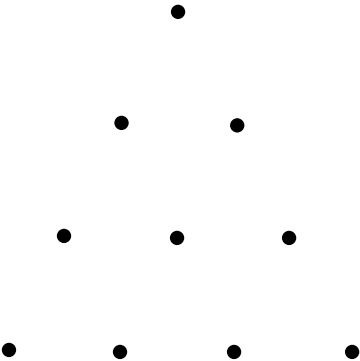
1)	2)
3)	4)

Задание 3. Проведите 5 прямых так, чтобы на каждой прямой было ровно две отмеченные точки, и каждая точка лежала на какой-то прямой.

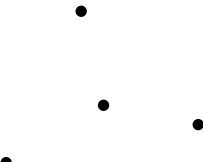
1)


2)


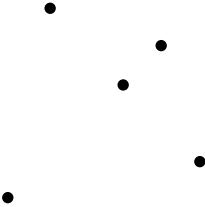
3)


4)


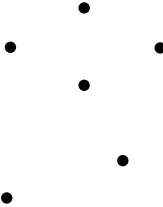
Задание 4. Через каждую пару точек провели прямые. Сколько будет нарисовано прямых?

1)


Ответ: _____

2)


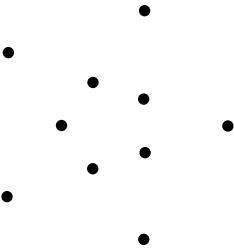
Ответ: _____

3)


Ответ: _____

4)


Ответ: _____

5)


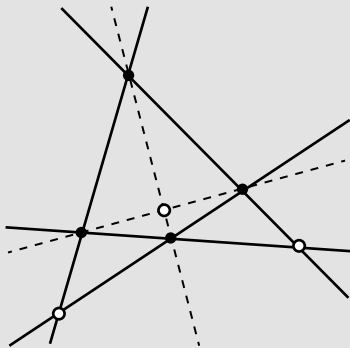
Ответ: _____

Задание 5. На плоскости даны k точек. Известно, что не все они лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проведена прямая. Какое наименьшее и наибольшее количество прямых может быть нарисовано при этом?

	наименьшее	наибольшее		наименьшее	наибольшее
1) $k = 3$			2) $k = 4$		
3) $k = 5$			4) $k = 10$		
5) $k = 13$			6) $k = 80$		

Задание 6. На плоскости даны k точек. Через каждую пару точек проведена прямая, и отмечены новые точки пересечения этих прямых. Какое наибольшее количество новых точек может получиться?

Пример: $k = 4$
Решение:
Для четырёх точек можно сделать иллюстрацию:



Ответ: 3

1) $k = 5$

Ответ: _____

2) $k = 3$

Ответ: _____

3) $k = 6$

Ответ: _____

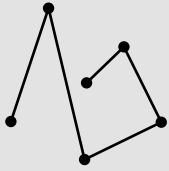
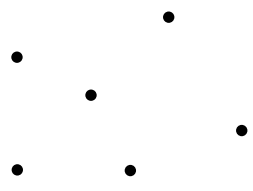
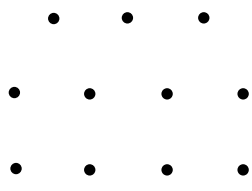
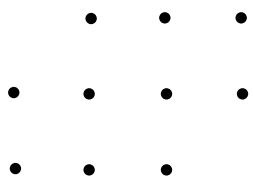
4) $k = 8$

Ответ: _____

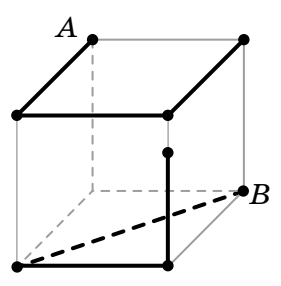
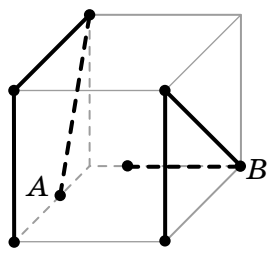
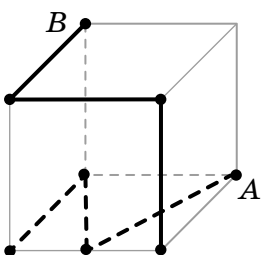
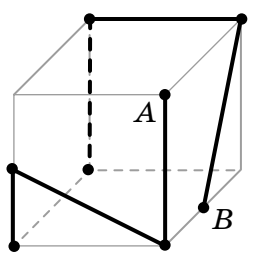
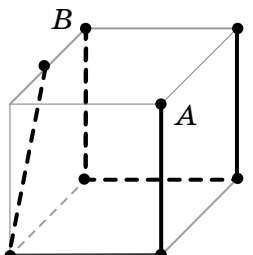
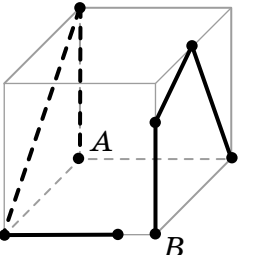
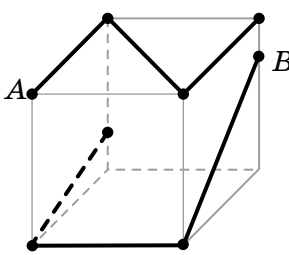
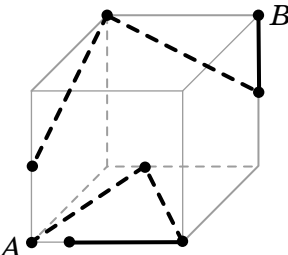
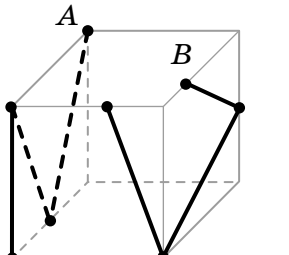
5) $k = 80$

Ответ: _____

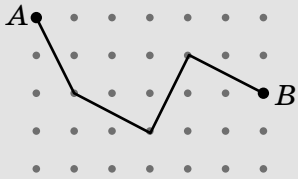
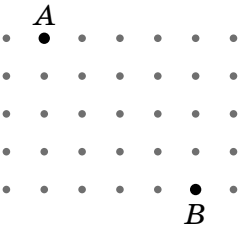
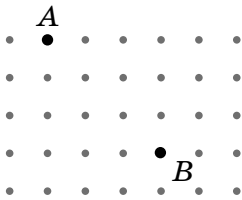
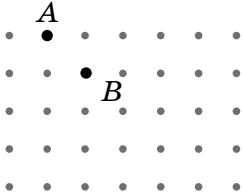
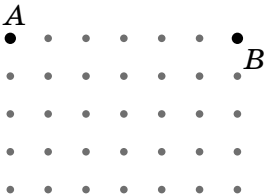
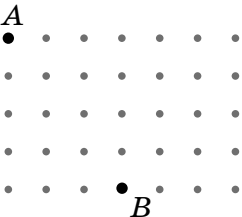
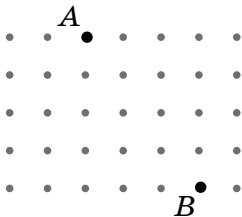
Задание 7. Соедините точки последовательными отрезками с концами в отмеченных точках так, чтобы никакие два отрезка не имели общих точек (кроме концов) и не лежали на одной прямой.

Пример: 	1) 	2) 	3) 
--	---	---	---

Задание 8. На поверхности куба изображены две ломаные – с началом в точке *A* и с началом в точке *B*. Определите, какая из ломаных – плоская, а какая – нет. В ответе укажите начальную букву.

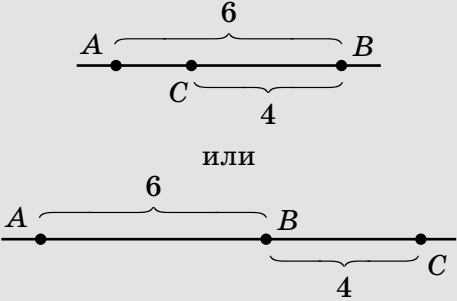
Пример:  Плоская: <i>A</i> Пространственная: <i>B</i>	1)  Плоская: Пространственная:	2)  Плоская: Пространственная:
3)  Плоская: Пространственная:	4)  Плоская: Пространственная:	5)  Плоская: Пространственная:
6)  Плоская: Пространственная:	7)  Плоская: Пространственная:	8)  Плоская: Пространственная:

Задание 9. Соедините точки A и B ломаной из k звеньев одинаковой длины, если концы звеньев – отмеченные точки, внутри звеньев отмеченных точек нет, соседние звенья ломаной не лежат на одной прямой.

Пример: $k = 4$ 	1) $k = 8$ 	2) $k = 3$ 
3) $k = 3$ 	4) $k = 4$ 	5) $k = 4$ 
6) $k = 6$ 	7) $k = 3$ 	8) $k = 3$ 

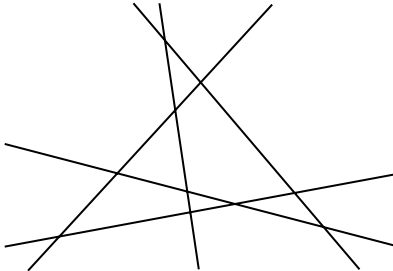
Задание 10. На прямой отмечены несколько точек, известны длины некоторых отрезков. Чему может быть равна длина отрезка AC ?

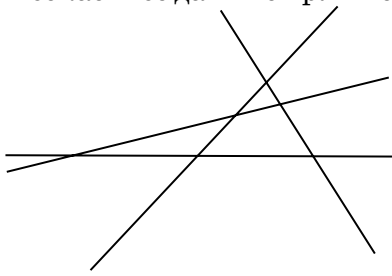
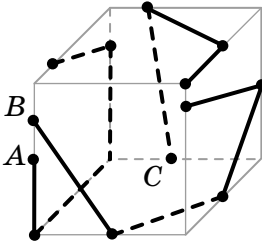
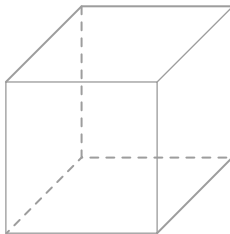
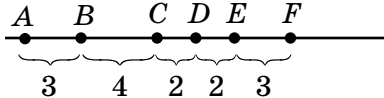
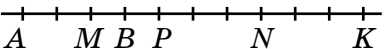
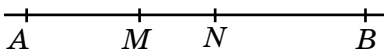
Важно помнить: разными буквами обозначаются разные точки.

Пример: $AB = 6, BC = 4$ Изобразим точки на прямой. Для точки C есть два варианта расположения:  Тогда $AC = 6 - 4 = 2$, или $AC = 6 + 4 = 10$. Ответ: 2 или 10	1) $AB = 10, BC = 5$ Ответ: _____
--	--

2) $AB = 12, BC = 16$	3) $AB = 20, BC = 20$
Ответ: _____	Ответ: _____
4) $AB = 8, BM = 6, MC = 3$	5) $AB = 9, BM = 5, MC = 8$
Ответ: _____	Ответ: _____
6) $AB = 12, BM = 3, MC = 15$	7) $AB = 4, BM = 5, MN = 9, NC = 1$
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 11. Проверьте себя. Выполните задания.

1) Сколько нарисовано прямых и сколько точек пересечения?  Ответ: _____	2) Нарисуйте 5 прямых, так, чтобы они образовали ровно одну точку пересечения.	3) Нарисуйте 4 прямые, так, чтобы они образовали ровно 6 точек пересечения.
---	---	--

4) Нарисуйте две прямые, каждая из которых пересекает все данные прямые. 	5) Нарисуйте 6 отрезков, каждый из которых пересекал бы ровно два других.	6) На плоскости даны 10 точек. Через каждую пару точек проведена прямая. Какое наименьшее и наибольшее количество прямых может быть нарисовано при этом? Ответ: _____
7) Дан куб. Выберите плоские ломаные (укажите начальную букву). 	8) Дан куб. Нарисуйте на его поверхности неплоскую ломаную из пяти звеньев. 	9) Укажите все точки, каждая из которых является серединой какого-либо отрезка с концами в отмеченных точках. 
10) Длина отрезка AB выбрана в качестве единицы измерения. Найдите длины отрезков NK, AP, MN. 	11) $AB = 50$, O – середина AM, P – середина NB, $OP = 30$. Найдите MN. 	12) На прямой отмечены точки A, B, C, D. Известно, что $AB = 8$, $BC = 6$, $CD = 2$. Чему может быть равна длина отрезка AD?
13) На прямой отмечены точки A, B, C, K. Известно, что $AB = 10$, $BK = 5$, $KC = 6$. Чему может быть равна длина отрезка AC? Ответ: _____	Ответ: _____	Ответ: _____

ЛУЧ. УГОЛ

Задание 12. Сколько углов, меньших развёрнутого, изображено на чертеже?

1) Ответ: _____	2) Ответ: _____	3) Ответ: _____	4) Ответ: _____
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

Задание 13. Сколько острых и тупых углов изображено на чертеже?

1) Острых: _____ Тупых: _____	2) Острых: _____ Тупых: _____	3) Острых: _____ Тупых: _____	4) Острых: _____ Тупых: _____
---	---	---	---

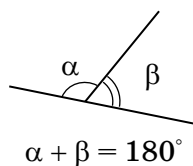
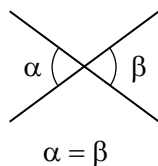
Задание 14. Найдите указанные углы.

1) $\angle AOC = \underline{\hspace{1cm}}$; $\angle AOD = \underline{\hspace{1cm}}$	2) $\angle BOD = 79^\circ$ $\angle AOC = \underline{\hspace{1cm}}$; $\angle AOD = \underline{\hspace{1cm}}$	3) $\angle AOB = \underline{\hspace{1cm}}$; $\angle AOD = \underline{\hspace{1cm}}$
4) $\angle AOD = \underline{\hspace{1cm}}$; $\angle COF = \underline{\hspace{1cm}}$	5) $\angle COM = \underline{\hspace{1cm}}$; $\angle BON = \underline{\hspace{1cm}}$	6) $\angle AOD = \underline{\hspace{1cm}}$; $\angle COF = \underline{\hspace{1cm}}$

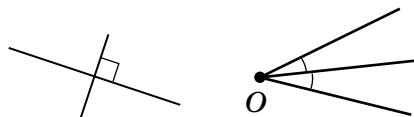


Важно знать:

- Вертикальные углы равны.
- Смежные углы в сумме составляют 180° .



- Угол между перпендикулярными прямыми равен 90° .
- Биссектриса угла делит его на два равных угла.



Задание 15. Найдите указанные углы.

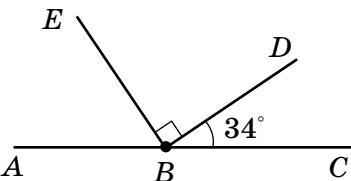
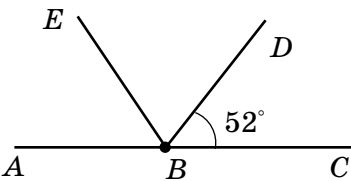
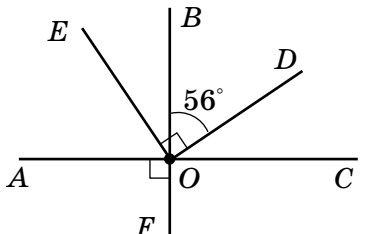
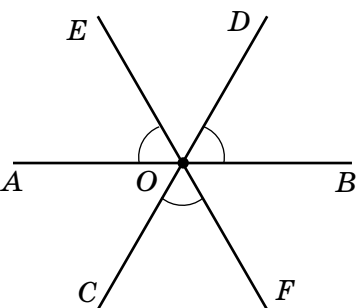
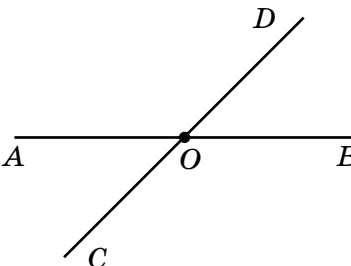
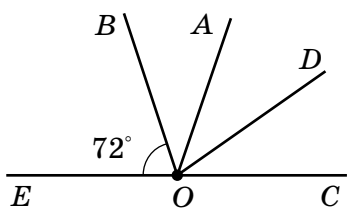
1) $\angle BOD = \underline{\hspace{2cm}}$	2) $\angle DOE = \underline{\hspace{2cm}}$	3) Угол AOB в три раза меньше угла BOD $\angle DOB = \underline{\hspace{2cm}}$
4) Угол AOB на 44° больше угла BOD $\angle DOB = \underline{\hspace{2cm}}$	5) Угол COB на 10° меньше угла COD $\angle AOC = \underline{\hspace{2cm}}$	6) $\angle AOC = \underline{\hspace{2cm}}$
7) Проведены биссектрисы углов ABD и DBC $\angle EBF = \underline{\hspace{2cm}}$	8) Угол AOC в 2 раза больше угла EBD $\angle ABD = \underline{\hspace{2cm}}$	9) Угол AOC в 2 раза меньше угла ABE $\angle DBC = \underline{\hspace{2cm}}$

Задание 16. Проверьте себя.

А) Отметьте галочками верные утверждения.

1) Смежные углы могут быть равны.	
2) Два смежных угла могут быть острыми.	
3) Два вертикальных угла могут быть тупыми.	
4) При пересечении двух прямых могут образоваться три тупых угла и один острый.	
5) При пересечении двух прямых могут образоваться четыре острых угла.	
6) При пересечении двух прямых могут образоваться четыре равных угла.	
7) Угол между биссектрисами смежных углов может быть острым.	
8) Угол, смежный с прямым углом, является прямым.	

Б) Найдите неизвестные величины.

1)  $\angle EBA = \underline{\hspace{2cm}}$	2) Угол ABE на 12° меньше угла EBD  $\angle CBE = \underline{\hspace{2cm}}$	3)  $\angle EOF = \underline{\hspace{2cm}}$
4)  $\angle COE = \underline{\hspace{2cm}}$	5) $7 \cdot \angle DOB = 3 \cdot \angle AOD$  $\angle COA = \underline{\hspace{2cm}}$	6) OA – биссектриса угла BOD, OD – биссектриса угла AOC  $\angle BOD = \underline{\hspace{2cm}}$

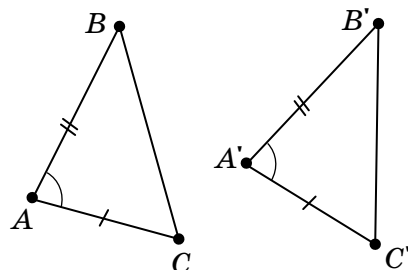
ТРЕУГОЛЬНИКИ

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

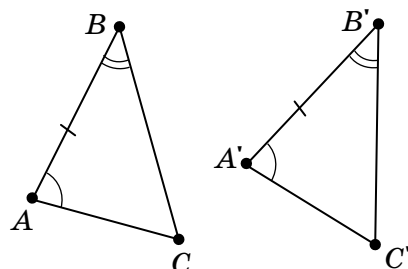


Важно знать:

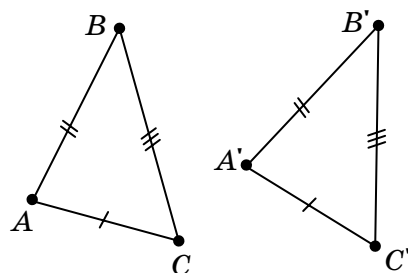
- Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (**первый признак**).



- Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (**второй признак**).



- Если три стороны одного треугольника равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (**третий признак**).



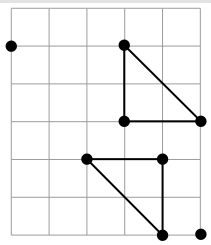
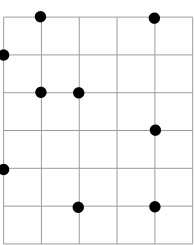
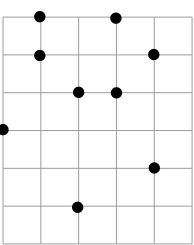
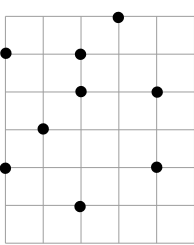
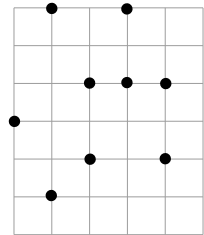
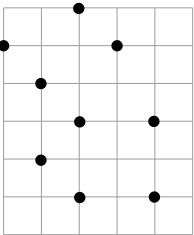
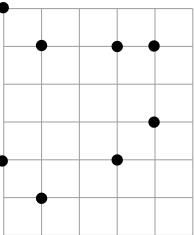
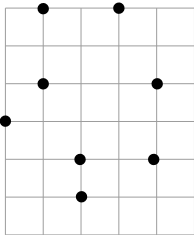
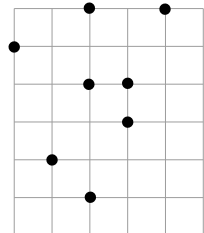
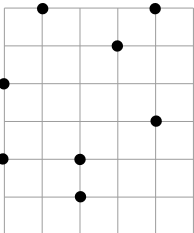
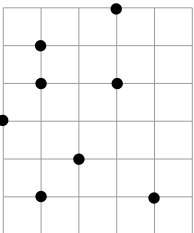
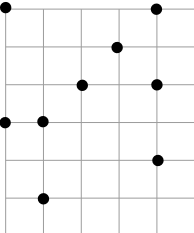
Задание 17. С помощью линейки и транспортира постройте треугольник.

1) Две стороны равны 3 см и 4 см, угол между ними равен 90°

2) Две стороны равны 4 см и 6 см, угол между ними равен 90°

3) Сторона равна 5 см, углы, прилежающие к этой стороне, равны 45° и 60°	4) Сторона равна 4 см, углы, прилежающие к этой стороне, равны 100° и 30°
--	---

Задание 18. Нарисуйте два равных треугольника, вершины которых лежат в отмеченных точках, причём каждая точка может быть вершиной ровно одного треугольника.

Пример: 	1) 	2) 	3) 
4) 	5) 	6) 	7) 
8) 	9) 	10) 	11) 

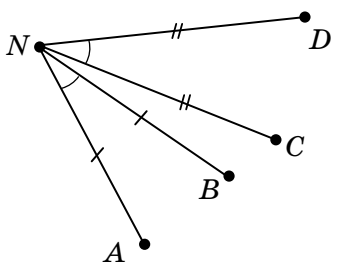
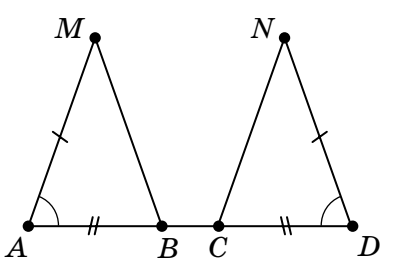
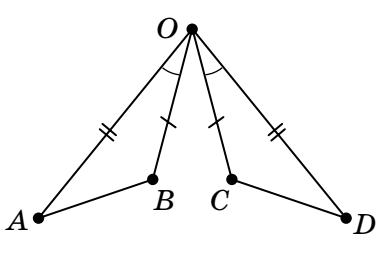
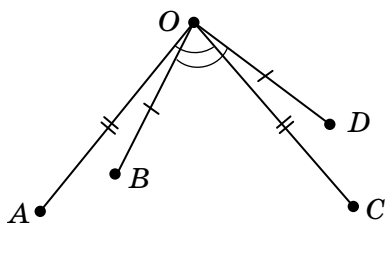
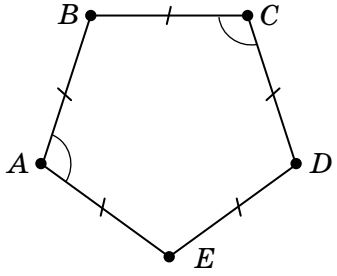
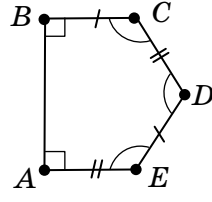
Задание 19. Найдите на рисунке хотя бы одну пару равных треугольников, в ответ запишите равные треугольники и номер признака, по которому они равны.

1) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____	2) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____	3) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____
4) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____	5) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____	6) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____
7) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____	8) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____	9) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____
10) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____	11) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____	12) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____

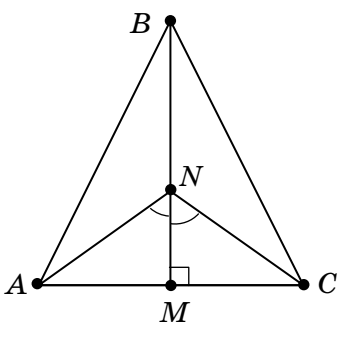
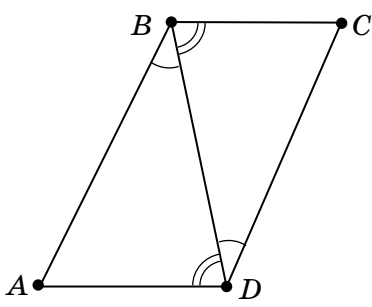
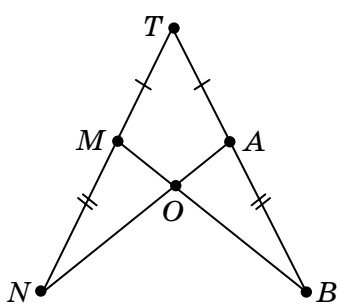
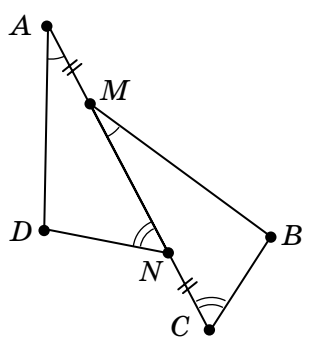
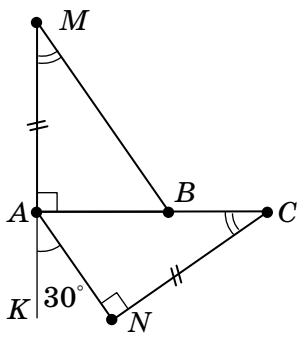
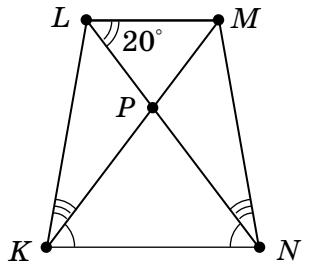
13) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____	14) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____	15) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____
16) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____	17) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____	18) Ответ: признак _____ Δ _____ = Δ _____

Задание 20. Проведите один или два отрезка с концами в отмеченных точках, так, чтобы на рисунке получились два равных треугольника. В ответе запишите равенство треугольников.

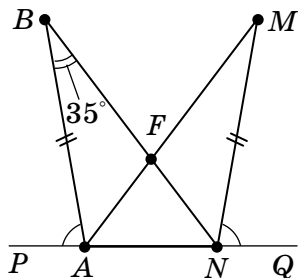
Пример: Проведён отрезок BD. Ответ: $\Delta ABD = \Delta CDB$	1) Ответ: _____	2) Ответ: _____
3) Ответ: _____	4) Ответ: _____	5) Ответ: _____

6)  Ответ: _____	7)  Ответ: _____	8)  Ответ: _____
9)  Ответ: _____	10)  Ответ: _____	11)  Ответ: _____

Задание 21. По данным чертежа найдите неизвестные величины.

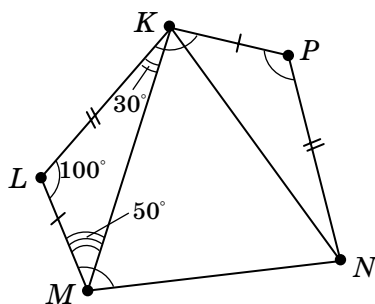
1) $AB = 8$. Найдите BC  Ответ: _____	2) $AB = 8$, $BC = 7$. Найдите AD и DC  Ответ: _____	3) $AO = 3$, $ON = 5$. Найдите BM и MO  Ответ: _____
4) $AD = 6$, $DN = 5$. Найдите BM и BC  Ответ: _____	5) Найдите $\angle ABM$  Ответ: _____	6) Найдите $\angle LPM$  Ответ: _____

7) Найдите $\angle NMF$



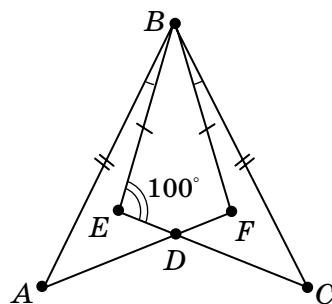
Ответ: _____

8) Найдите $\angle MKN$



Ответ: _____

9) Найдите $\angle AFB$

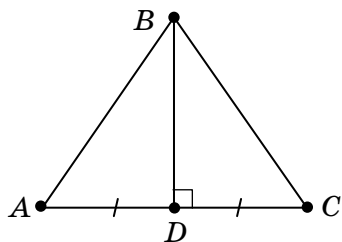


Ответ: _____

Задание 22. Проверьте себя.

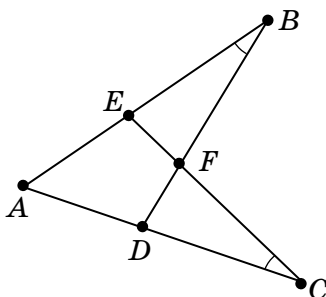
А) Найдите равные треугольники, запишите доказательство их равенства.

1)



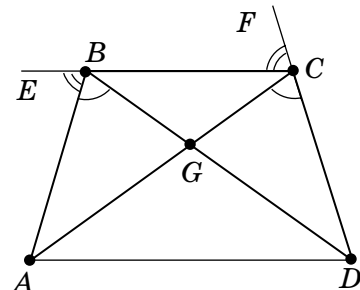
Ответ: _____

2) $AB = AC$



Ответ: _____

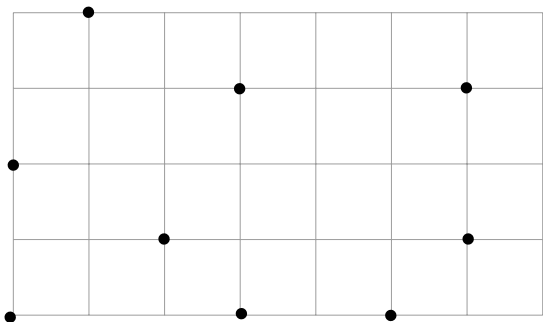
3)



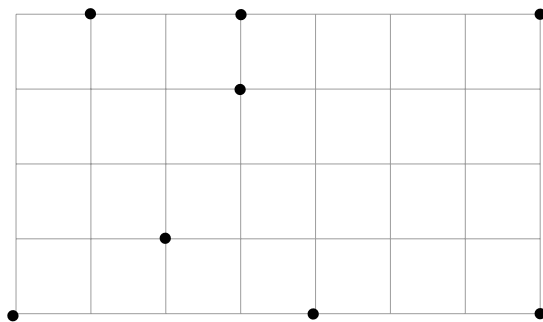
Ответ: _____

Б) Нарисуйте два равных треугольника, вершины которых лежат в отмеченных точках, причём каждая точка может быть вершиной ровно одного треугольника.

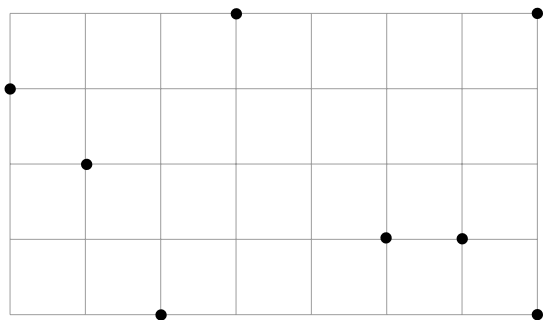
1)



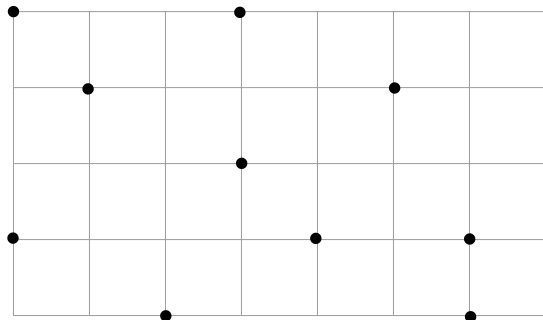
2)



3)



4)



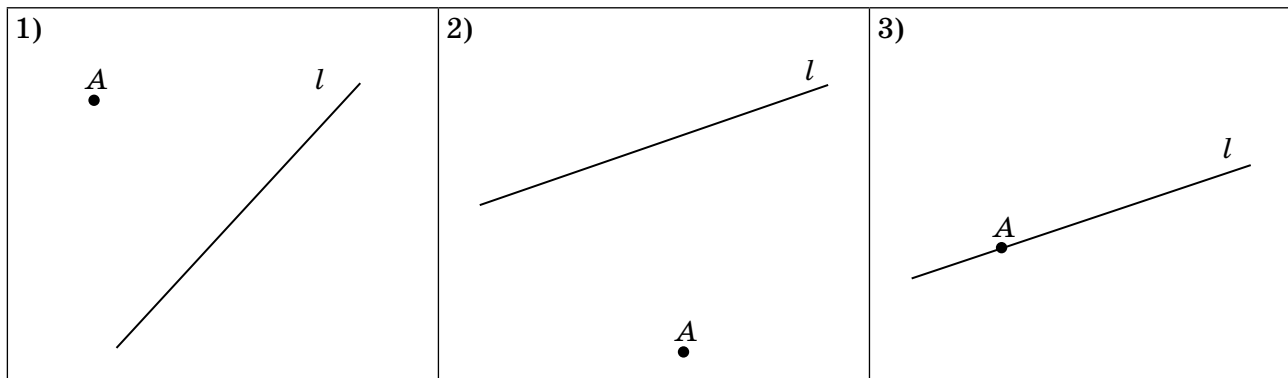
ЭЛЕМЕНТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА. РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



Важно знать:

- Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.

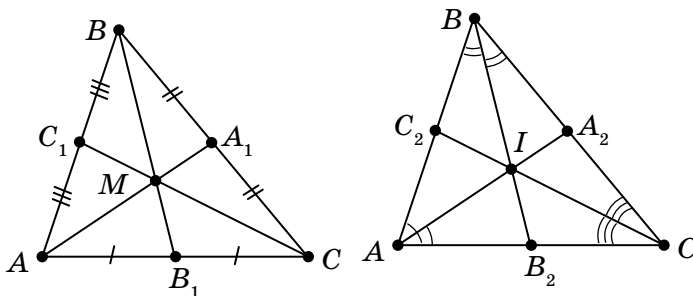
Задание 23. Дана точка A и прямая l . Проведите перпендикуляр из A на прямую l «на глазок» при помощи линейки, а затем проведите перпендикуляр при помощи угольника. Проверьте свой глазомер.



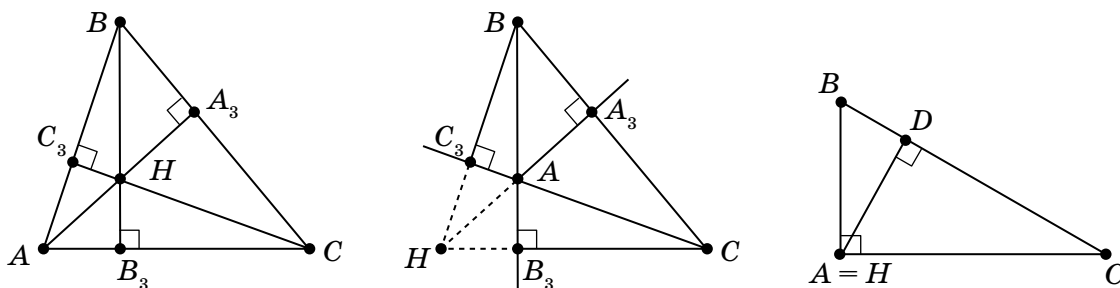
Важно знать:

- Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой** треугольника.

- Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется **биссектрисой** треугольника.

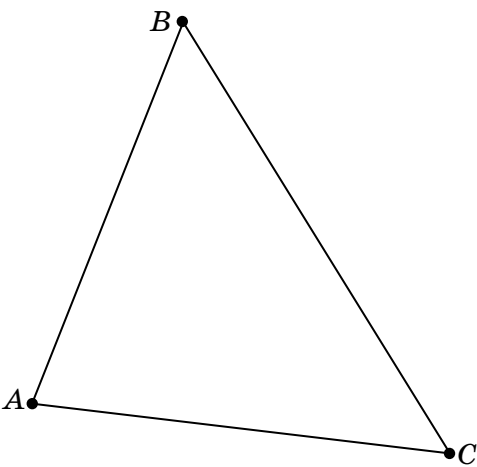
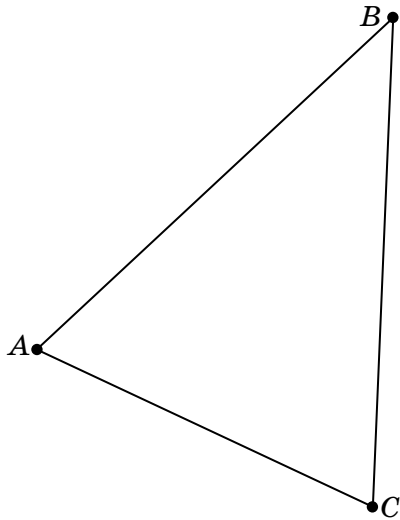
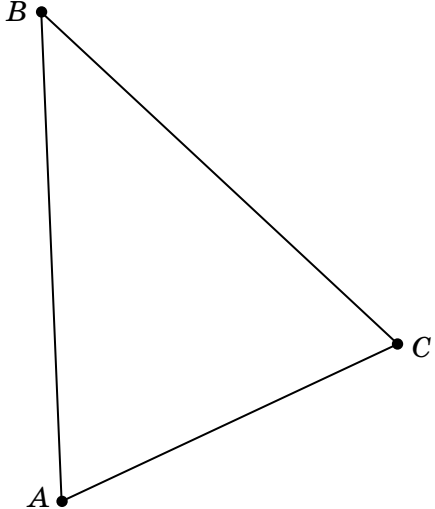
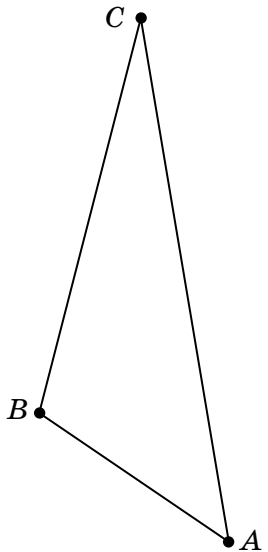


- Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется **высотой** треугольника.

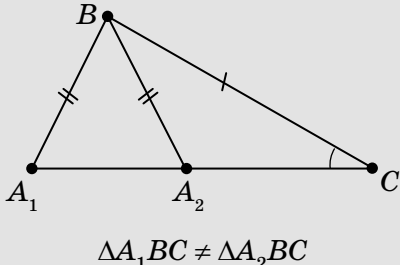


- Перечисленные элементы треугольника обладают **замечательными свойствами**: медианы треугольника пересекаются в одной точке; биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке; прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке. Эти точки называются **замечательными точками** треугольника: центр тяжести треугольника, инцентр треугольника и ортоцентр треугольника соответственно.

Задание 24. При помощи линейки с делениями, угольника и транспортира выполните задание и отметьте соответствующую замечательную точку треугольника.

1) Постройте биссектрисы 	2) Постройте медианы 
3) Постройте высоты 	4) Постройте ортоцентр 

Задание 25. Придумайте пример и сделайте чертёж, опровергающий предложенное утверждение «признак равенства треугольников».

Формулировка утверждения	Место для чертежа
Пример. Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.	 $\triangle A_1BC \neq \triangle A_2BC$

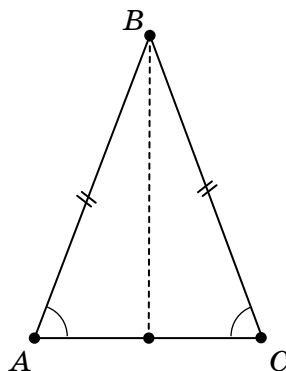
Формулировка утверждения	Место для чертежа
1) Если сторона и два угла одного треугольника равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны.	
2) Если биссектриса и высота, проведённые к одной стороне, одного треугольника равны биссектрисе и высоте, проведёнными к одной стороне, другого треугольника, то такие треугольники равны.	
3) Если две стороны и медиана, проведённая к одной из них, одного треугольника равны двум сторонам и медиане, проведённой к одной из них, другого треугольника, то такие треугольники равны.	
4) Если две стороны и высота, проведённая к одной из них, одного треугольника равны двум сторонам и высоте, проведённой к одной из них, другого треугольника, то такие треугольники равны.	
5) Если две стороны и высота, проведённая к одной из них, одного треугольника равны двум сторонам и высоте, проведённой к соответствующей стороне другого треугольника, то такие треугольники равны.	
6) Если два угла и медиана одного треугольника равны двум углам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.	

Формулировка утверждения	Место для чертежа
7) Если сторона, а также высота и биссектриса, проведённые к другой стороне одного треугольника, равна стороне, а также высоте и биссектрисе, проведённым к другой стороне второго треугольника, то такие треугольники равны.	



Важно знать:

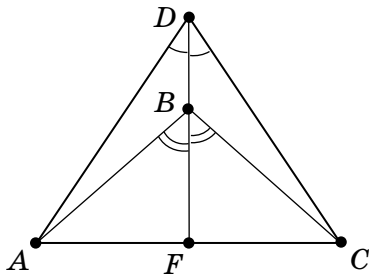
- Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны.
- **Свойства равнобедренного треугольника:**
 - В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
 - В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.
- **Признаки равнобедренного треугольника:**
 - Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.
 - Если два объекта из трёх (медиана, биссектриса и высота, проведённые из одной вершины) совпадают, то треугольник равнобедренный.
- Треугольник называется равносторонним, если все три его стороны равны. В частности, равносторонний треугольник является равнобедренным.



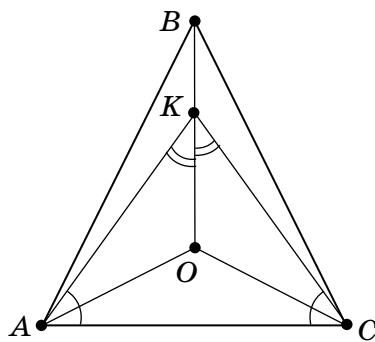
Задание 26. Используя данные чертежа, докажите, что $\triangle ABC$ – равнобедренный.

1)	2)	3)
4)	5)	6)

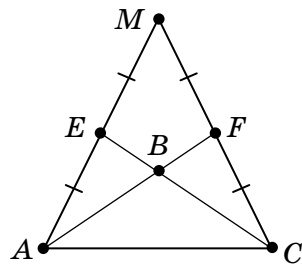
7)



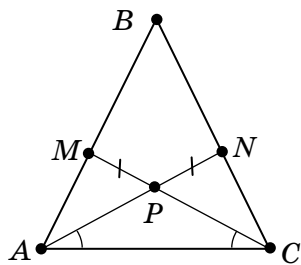
8)



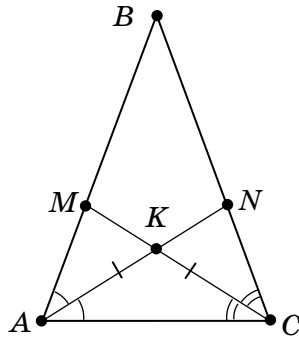
9)



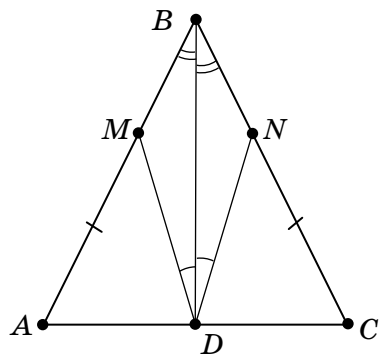
10)



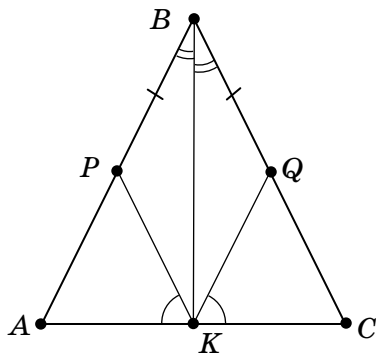
11)



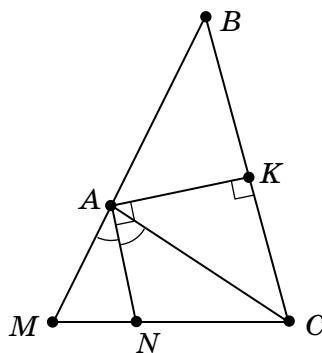
12)



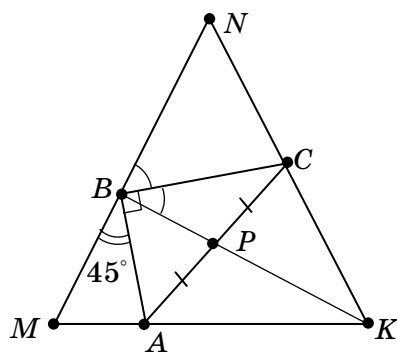
13)

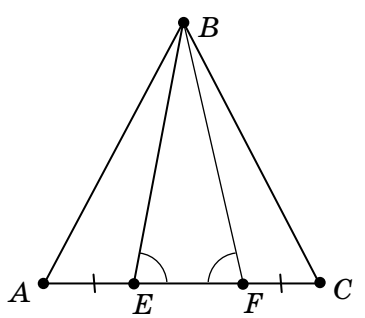
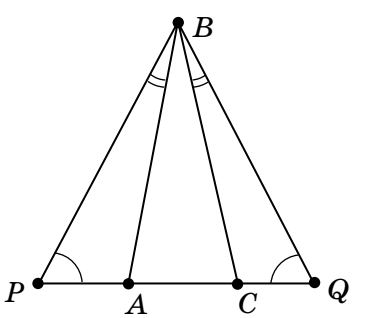
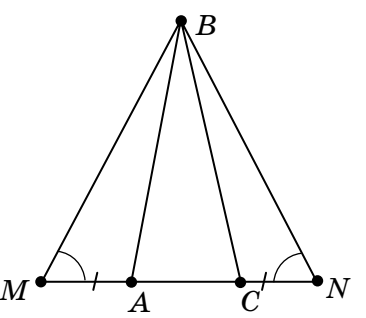


14)

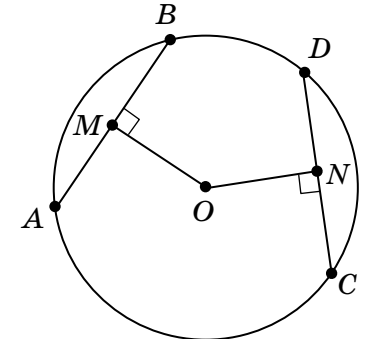
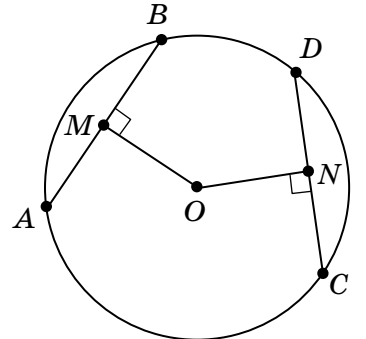
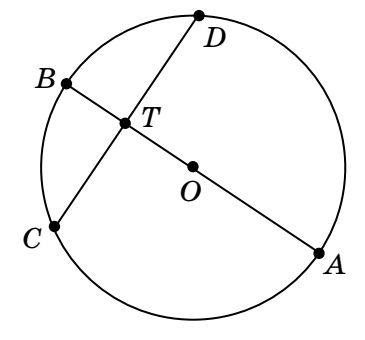
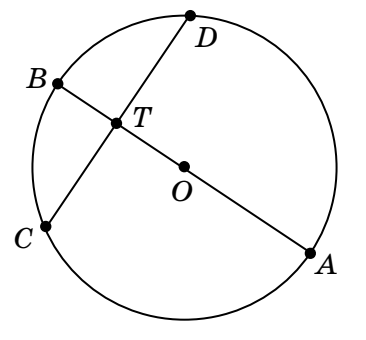


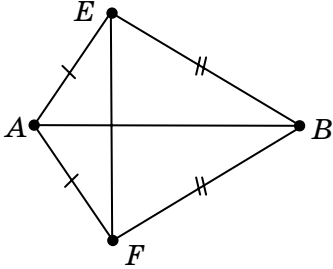
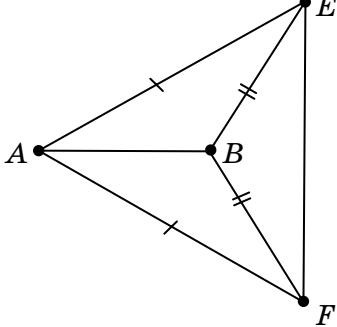
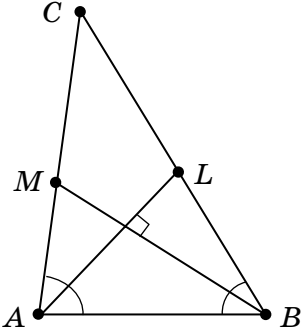
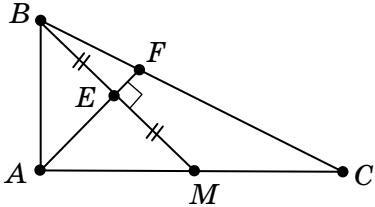
15)



16) 	17) 	18) 
---	--	---

Задание 27. Выполните задания.

1.1) Дано: $AB = CD$. Докажите: $MO = NO$ 	Решение:	1.2) Дано: $MO = NO$. Докажите: $AB = CD$ 
2.1) Дано: $TC = TD$. Докажите: $AB \perp CD$ 	Решение:	2.2) Дано: $AB \perp CD$. Докажите: $TC = TD$ 

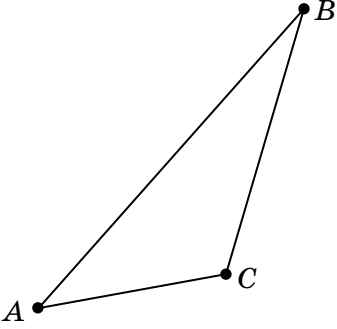
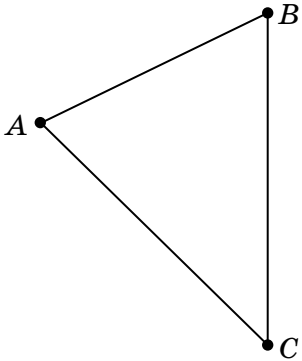
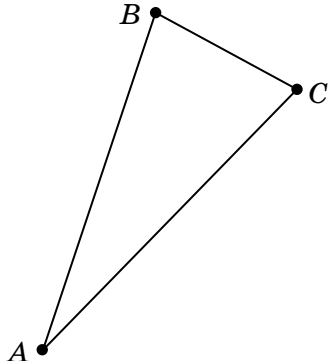
3.1) Докажите: $AB \perp FE$ 	Решение:	3.2) Докажите: $AB \perp FE$ 
4.1) Дано: AL – биссектриса, BM – медиана, $AB = 4$. Найдите BC 	Решение:	4.2) Дано: BM – медиана, $AB = 4$. Найдите AC 

Задание 28. Проверьте себя.

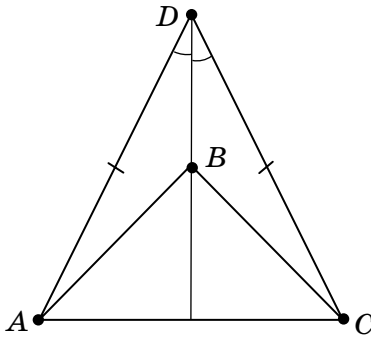
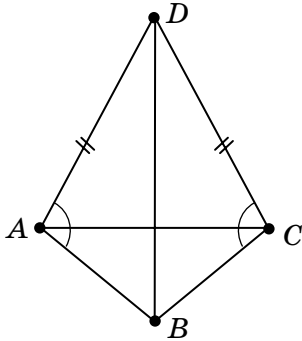
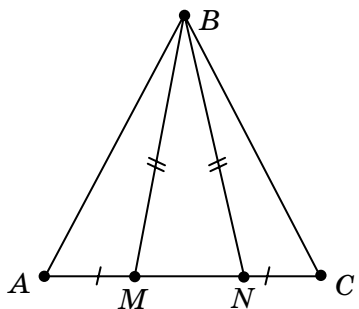
А) Отметьте галочками верные утверждения.

1) Если в треугольнике медиана является высотой, то этот треугольник – равнобедренный.	
2) Если в треугольнике высота равна биссектрисе, то этот треугольник – равнобедренный.	
3) Если в треугольнике к двум сторонам проведены биссектрисы, образующие равные углы с третьей стороной, то этот треугольник – равнобедренный.	
4) Если в треугольнике к двум сторонам проведены равные высоты, образующие равные углы с третьей стороной, то этот треугольник – равнобедренный.	
5) Если в треугольнике медиана равна высоте, то этот треугольник – равнобедренный.	

Б) Проведите «на глазок» при помощи линейки без делений указанный отрезок, а затем выполните построение, используя линейку, угольник и транспортир. Проверьте свой глазомер.

1) Высоту из точки A 	2) Медиану из точки B 	3) Биссектрису из точки C 
--	---	--

В) Докажите, что $\triangle ABC$ – равнобедренный.

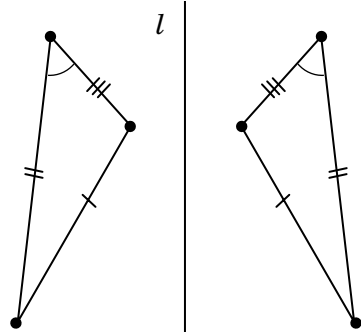
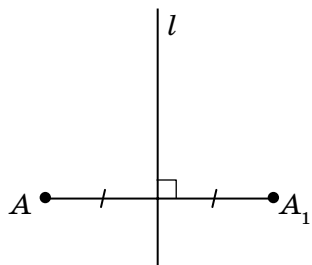
1)  Решение:	2)  Решение:	3)  Решение:
--	---	--

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК



Важно знать:

- Прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно этому отрезку, называется **серединным перпендикуляром** к этому отрезку.
- Точки A и A_1 называются **симметричными относительно прямой l** , если l является серединным перпендикуляром к отрезку AA_1 , точки на прямой l считаются симметричными сами себе.
- Если все точки фигуры **попарно симметричны относительно прямой l** , то говорят, что фигура **симметрична относительно прямой l** , а сама прямая l называется **осью симметрии** фигуры.
- **Важные свойства осевой симметрии:**
 - Симметрия сохраняет длины отрезков и углы между прямыми (лучами, отрезками).
 - Точка пересечения двух объектов симметрична точке пересечения образов этих объектов при симметрии.

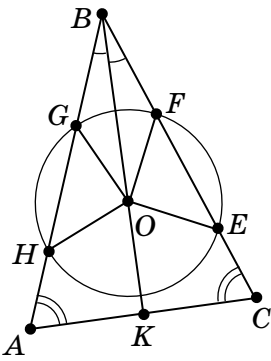
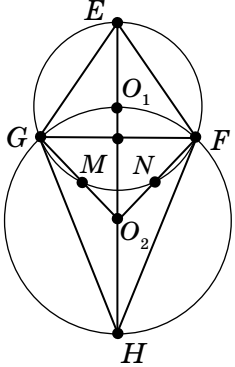


Задание 29. Нарисуйте («на глазок») ось симметрии фигуры. Если их несколько, нарисуйте все.

1) 	2) 	3) 	4)
5) 	6) 	7) 	8)

Задание 30. Найдите ось симметрии фигуры, изображённой на чертеже, и определите пары симметричных объектов.

1) Ось симметрии _____		2) Ось симметрии _____
A и _____		C и _____
AE и _____		D и _____
G и _____		AF и _____
AH и _____		CF и _____
AD и _____		AB и _____
FG и _____		F и _____

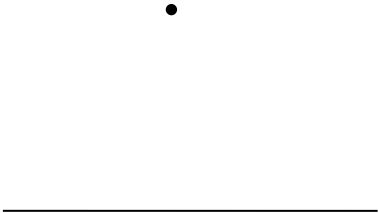
3) Ось симметрии _____ С и _____ Н и _____ OF и _____ BH и _____ $\angle EOF$ и _____ $\angle AHO$ и _____		4) Ось симметрии _____ F и _____ O_2F и _____ M и _____ ME и _____ $\angle MAG$ и _____ $\angle O_1FO_2$ и _____	
--	--	---	--



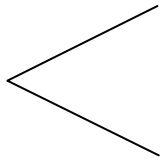
Важно знать:

- Геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки, – окружность с центром в данной точке.
- Геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от концов данного отрезка, – серединный перпендикуляр к данному отрезку.
- Геометрическое место точек плоскости, лежащих внутри угла и равноудалённых от его сторон, – биссектриса этого угла.

Задание 31. Выполните построение циркулем и линейкой.

1) Постройте треугольник по трём сторонам. a b c	2) Постройте треугольник по трём сторонам. a b c
3) Через данную точку проведите перпендикуляр к данной прямой. 	4) Через данную точку проведите перпендикуляр к данной прямой. 

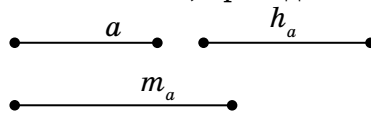
5) Постройте окружность с центром O , проходящую через точки A и B , так, чтобы $\angle OAB$ был равен данному углу.



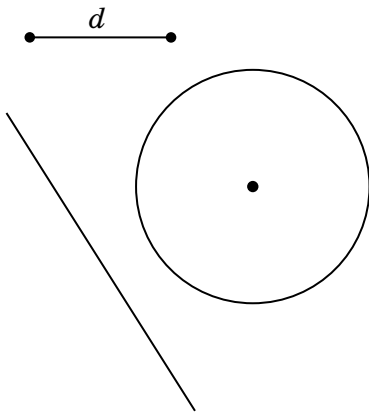
A •

• B

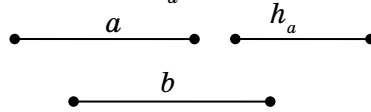
6) Постройте треугольник по стороне, медиане и высоте, проведённым к этой стороне.



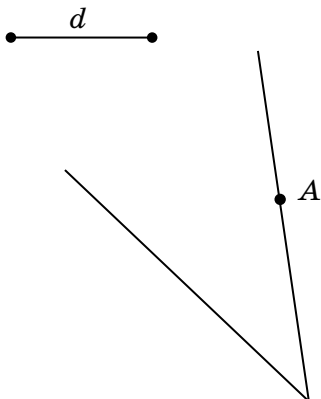
7) Постройте на данной окружности точки, находящиеся от данной прямой на расстоянии, равном d .



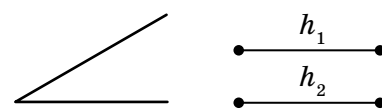
8) Постройте треугольник по сторонам a и b и высотой h_a , проведённой к первой из них.



9) Постройте окружность с центром A , которая на другой стороне угла отсекает хорду, равную d .



10) Постройте треугольник по углу и высотам h_1 и h_2 , проведённым из вершин двух других углов.



Задание 32. Проверьте себя.

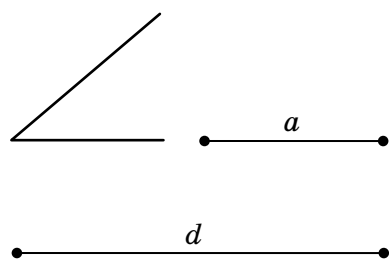
А) Напишите 5 букв русского алфавита и 5 букв греческого алфавита, имеющих ось симметрии.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Б) Закончите предложение.

1) Угол симметричен относительно _____
2) Равнобедренный треугольник симметричен относительно _____
3) Отрезок симметричен относительно _____
4) Окружность симметрична относительно _____
5) Прямая симметрична относительно _____
6) Квадрат симметричен относительно _____
7) Фигура из двух равнобедренных треугольников с общим основанием симметрична относительно _____

В) Постройте треугольник по стороне a , прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон d .



ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

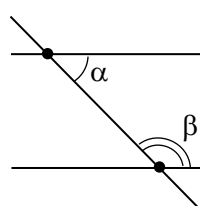
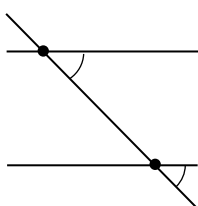
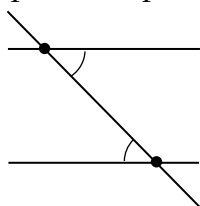
СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ



Важно знать:

• **Признаки параллельности двух прямых:**

- ♦ Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.
- ♦ Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.
- ♦ Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180° , то прямые параллельны.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

- ♦ Две прямые, перпендикулярные к третьей прямой, параллельны.

Задание 33. Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

1) 	2) 	3) 	4)
5) 	6) 	7) 	8)
9) 	10) 	11) 	12)



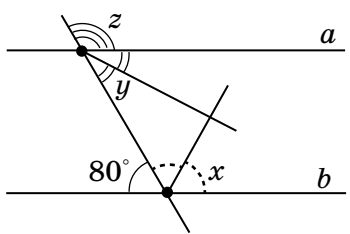
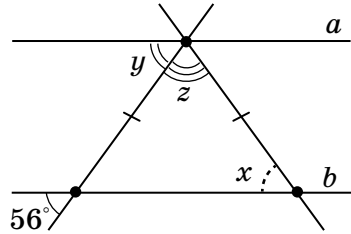
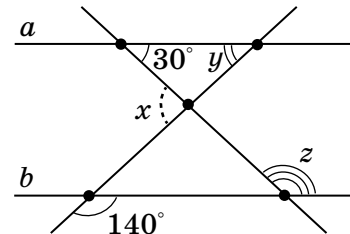
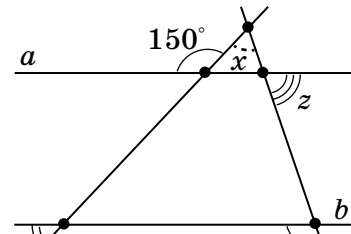
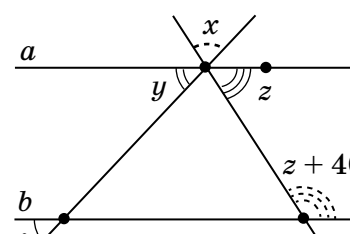
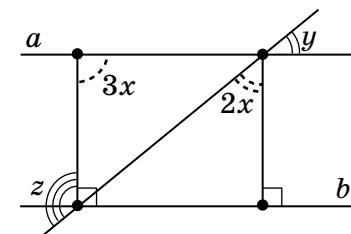
Важно знать:

• Свойства параллельных прямых:

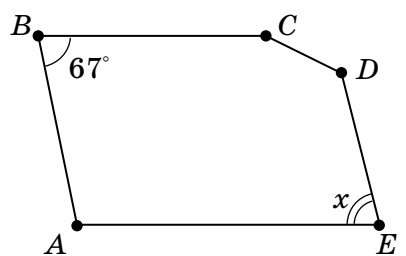
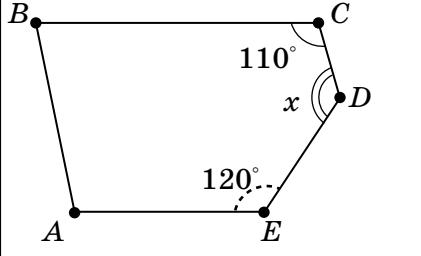
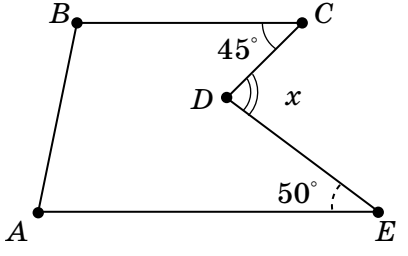
- ♦ При пересечении двух параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны.
- ♦ При пересечении двух параллельных прямых секущей соответственные углы равны.
- ♦ При пересечении двух параллельных прямых секущей сумма односторонних углов равна 180° .
- ♦ Биссектрисы односторонних углов при параллельных прямых перпендикулярны.
- ♦ Если две точки лежат на одной из параллельных прямых, то расстояния от них до второй прямой равны.

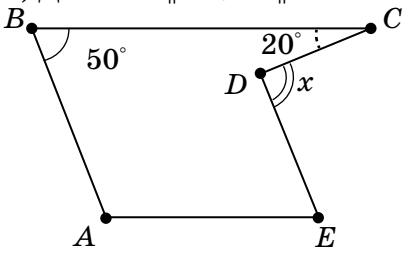
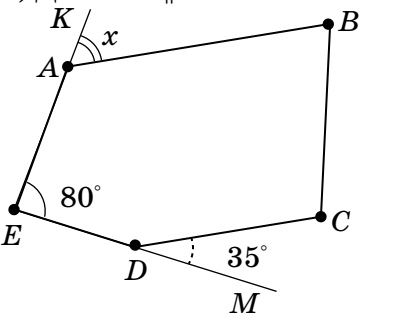
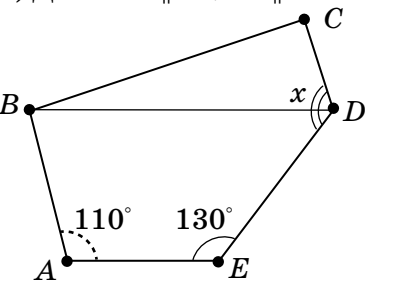
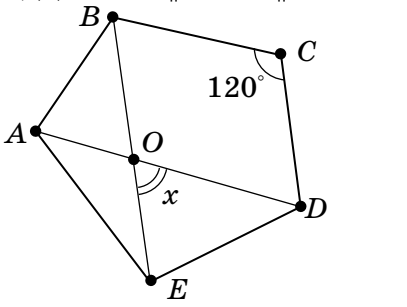
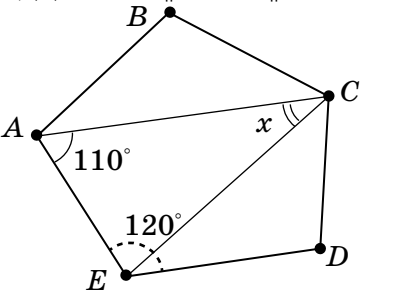
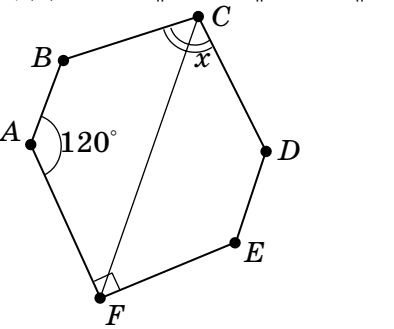
Задание 34. Прямые a и b параллельны. По данным чертежа найдите неизвестные углы x , y и z .

1)	$x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____	2)	$x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____
3)	$x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____	4)	$x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____
5)	$x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____	6)	$x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____

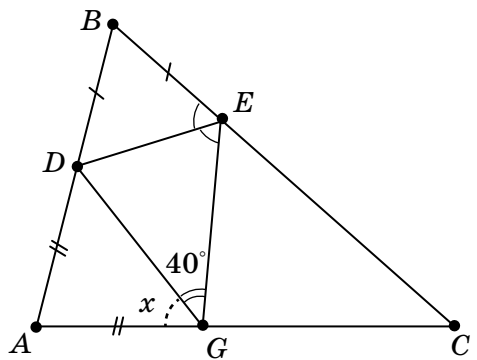
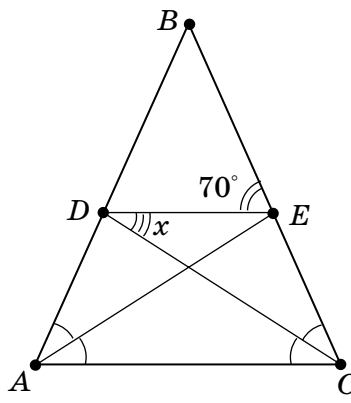
7) 	$x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____	8) 	$x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____
9) 	$x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____	10) 	$x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____
11) 	$x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____	12) 	$x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____

Задание 35. По данным чертежа найдите x .

1) Дано: $AB \parallel DE$, $BC \parallel AE$  Ответ: _____	2) Дано: $BC \parallel AE$  Ответ: _____	3) Дано: $BC \parallel AE$  Ответ: _____
---	--	---

4) Дано: $AB \parallel DE, BC \parallel AE$  Ответ: _____	5) Дано: $AB \parallel CD$  Ответ: _____	6) Дано: $AB \parallel DC, BD \parallel AE$  Ответ: _____
7) Дано: $BE \parallel DC, BC \parallel AD$  Ответ: _____	8) Дано: $AB \parallel CE, AC \parallel DE$  Ответ: _____	9) Дано: $AB \parallel FC, BC \parallel FE, AF \parallel CD$  Ответ: _____

Задание 36. Проверьте себя. По данным чертежа найдите x .

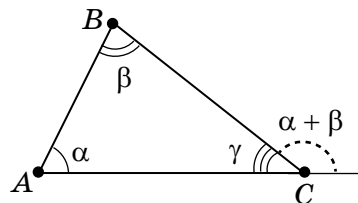
1)  Решение: Ответ: _____	2)  Решение: Ответ: _____
---	--

УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА. НЕРАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКА



Важно знать:

- Сумма углов треугольника равна 180° .
- Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.



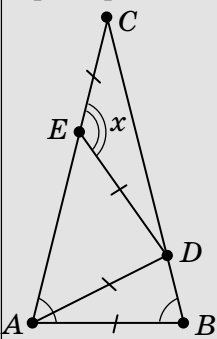
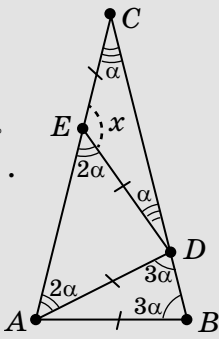
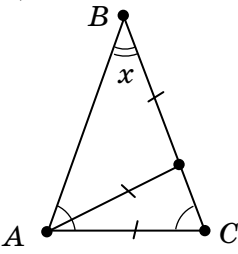
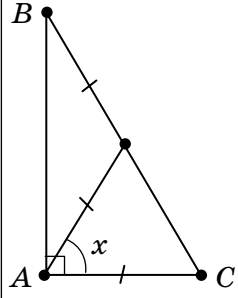
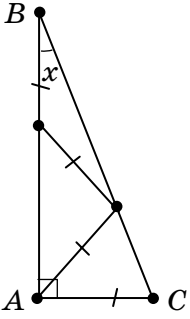
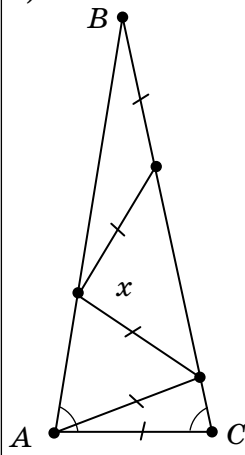
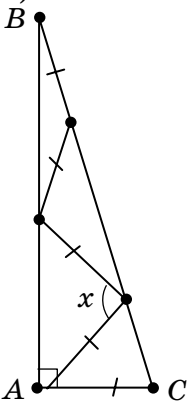
Задание 37. По данным чертежа найдите x .

1) Ответ: _____	2) Ответ: _____	3) Ответ: _____	4) Ответ: _____
5) Ответ: _____	6) Ответ: _____	7) Ответ: _____	8) Ответ: _____
9) Ответ: _____	10) Ответ: _____	11) Ответ: _____	12) Ответ: _____
13) Ответ: _____	14) Ответ: _____	15) Ответ: _____	16) Ответ: _____

Задание 38. Определите вид треугольника, если...

Условие	Место для рисунков и/или вычислений	Ответ
Пример: ...величины двух его углов равны 25° и 60°	Вычислим третий угол треугольника: $180^\circ - 25^\circ - 60^\circ = 95^\circ$, получилось, что этот угол больше 90°	тупоугольный
1) ...величины двух его углов равны 37° и 67°		
2) ...величина наибольшего угла равна 88°		
3) ...величины двух углов рав- ны 52° и 38°		
4) ...все углы треугольника равны		
5) ...треугольник равнобед- ренный, и угол при его вер- шине равен 80°		
6) ...треугольник равнобед- ренный, и угол при его ос- новании равен 25°		
7) ...треугольник равнобед- ренный, и внешний угол при основании равен 152°		
8) ...величина одного его внешнего угла равна 67°		
9) ...один из углов треугольни- ка в 4 раза больше суммы двух других углов		
10) ...углы треугольника от- носятся как $1 : 2 : 3$		
11) ...наименьший из внеш- них углов равен 117°		
12) ...угол между высотой и биссектрисой, выходя- щих из одной вершины треугольника, равен 67°		

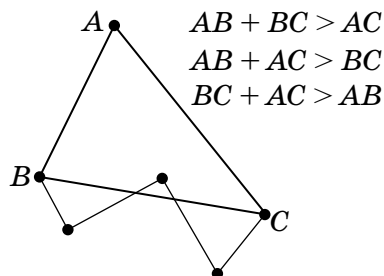
Задание 39. По данным чертежа найдите x , введя вспомогательный угол.

Пример:  Решение: введем переменную $\angle C = \alpha$. Используя свойства равнобедренных треугольников и внешнего угла треугольника, можно сделать следующие выводы – см. чертёж. Тогда для $\triangle ABC$ можно составить уравнение $3\alpha + 3\alpha + \alpha = 180^\circ$, откуда $\alpha = \left(\frac{180}{7}\right)^\circ$. Из $\triangle CED$ $x = 180^\circ - 2\alpha = \frac{5}{7} \cdot 180^\circ = \left(128\frac{5}{7}\right)^\circ$.  Ответ: $128\frac{5}{7}^\circ$	1)  Ответ: _____
2)  Ответ: _____	3)  Ответ: _____
4)  Ответ: _____	5)  Ответ: _____



Важно знать:

- В треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол, и наоборот – напротив большего угла лежит большая сторона.
- Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон (неравенства треугольника). Обобщая, длина ломаной больше длины отрезка от её начала до конца.
- Каждая сторона треугольника больше модуля разности двух других сторон.



Задание 40. Существует ли треугольник со сторонами a, b, c ?

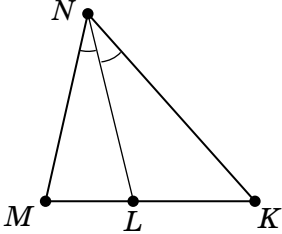
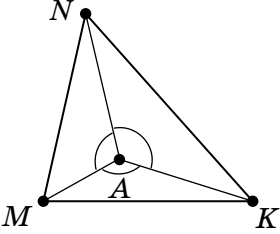
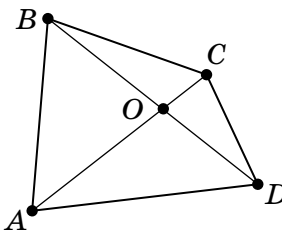
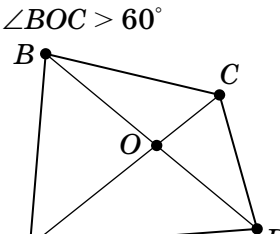
	a	b	c	да / нет		a	b	c	да / нет
1)	6	12	17		2)	14	7	7	
3)	19	21	8		4)	21	17	43	
5)	15	13	27		6)	39	77	39	

Задание 41. Даны длины a, b двух сторон треугольника. Сколько целых значений может принимать длина c третьей стороны? В каких границах меняется это значение?

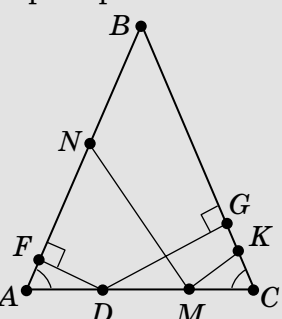
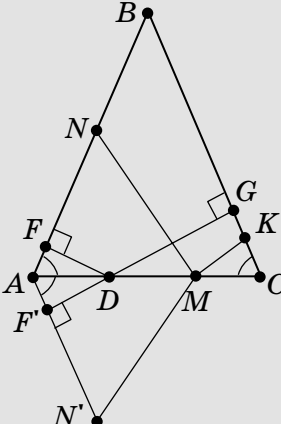
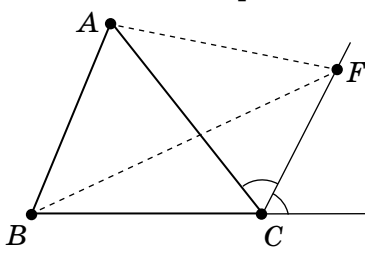
	a	b	c		a	b	c
	6	12	11, от 7 до 17	1)	14	11	
2)	3	91		3)	15	16	
4)	8	8		5)	66	77	

Задание 42. Докажите неравенство.

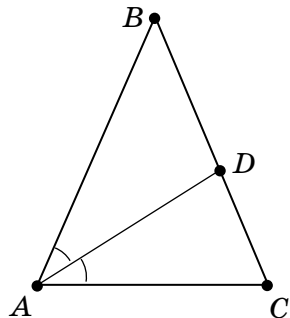
Пример: Докажите: $AB + BC + CD > AD$	Решение: Проведём BD. Из $\triangle BCD$ следует, что $BC + CD > BD$, а из $\triangle BAD$ следует, что $AB + BD > AD$. Отсюда получаем $AB + BC + CD > AD$.	1) Докажите: $MN > NH$	Решение:
2) $\alpha + \beta = 87^\circ$ Докажите: $AC > BC$	Решение:	3) Докажите: $QT > PQ$	Решение:

4) Докажите: $MN > ML$ 	Решение:	5) Докажите: $MN + NK > MA + AK$ 	Решение:
6) Докажите: $AC + BD > AD + BC$ 	Решение:	7) $BD = AD = AC$ Докажите: $\angle BOC > 60^\circ$ 	Решение:

Задание 43. Выполните задания.

Пример:  D, M – произвольные точки на основании равнобедренного треугольника. Докажите: $FD + DG \leq MN + MK$ Решение: Построим точки, симметричные точкам F и N относительно AC (см. рисунок). Тогда $AN' \parallel BC$, $DF' \perp AN'$. Поэтому точки F', D, G лежат на одной прямой, и $FD + DG = F'G$, $F'G$ – расстояние между параллельными прямыми. А это расстояние не превосходит длину ломаной $N'MK$, длина которой равна $MN + MK$. 	1) Докажите, что $FA + FB > CA + CB$, если F – точка на биссектрисе внешнего угла  Решение:
---	--

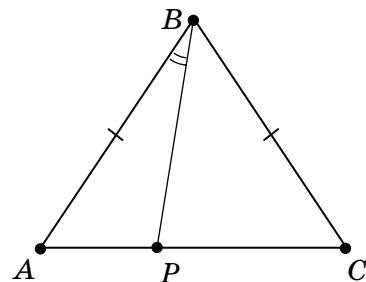
2) $AB = BC$. Докажите, что $AD < 2DC$



Решение:

3) $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle ABP = 20^\circ$.

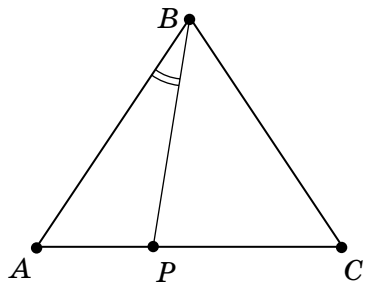
Докажите: $BC < AP + AC$



Решение:

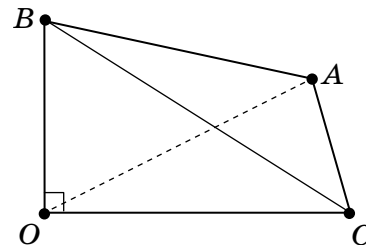
4) $\angle ABC = 70^\circ$, $\angle ABP = 10^\circ$.

Докажите: $BC < 2AP + AC$



Решение:

5) Докажите: $P_{\triangle ABC} \geq 2AO$



Решение:



Важно знать:

- Если из утверждения A следует утверждение B , то говорят, что A – достаточное условие для B , а B – необходимое условие для A .

Например: «Для того, чтобы треугольник был тупоугольным, необходимо и достаточно, чтобы один из его углов был больше 90° », «Для того, чтобы треугольник был тупоугольным, достаточно, чтобы один из его углов был равен 108° ».

Задание 44. Заполните пропуски, вставив слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно».

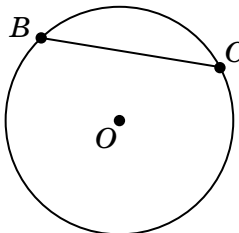
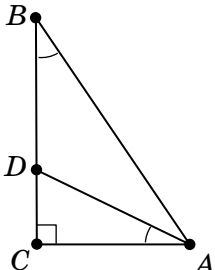
- 1) Для того, чтобы треугольник был остроугольным, _____, чтобы наибольший его угол был равен 80° .
- 2) Для того, чтобы треугольник был равнобедренный, _____, чтобы два его угла были равны 50° и 80° .
- 3) Для того, чтобы треугольник был равнобедренным, _____, чтобы он имел два равных угла.
- 4) Для того, чтобы из трёх отрезков можно было составить треугольник, _____, чтобы длина одного из них была меньше, чем сумма длин двух других.
- 5) Для того, чтобы треугольник был прямоугольным, _____, чтобы два его угла были равны 37° и 53° .
- 6) Для того, чтобы треугольник был тупоугольным, _____, чтобы один из его углов был меньше 45° .

Задание 45. Проверьте себя.

А) Ответьте на вопросы.

1) В треугольнике два угла равны 46° и 57° . Чему равна величина наибольшего внешнего угла этого треугольника?	
2) Существует ли четырёхугольник со сторонами 1; 2; 3; 6?	
3) Сколько существует треугольников с целочисленными сторонами, периметр которых равен 10?	
4) Две стороны треугольника равны 37 и 45. Сколько целых значений может принимать длина третьей стороны?	
5) Верно ли утверждение: для того, чтобы прямые были параллельны, достаточно чтобы при пересечении этих прямых секущей накрест лежащие углы были равны?	

Б) Выполните задания.

1) Докажите: длина BC меньше диаметра окружности. Решение: 	2) Докажите: $BC + CD > AB$. Решение: 
--	--

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



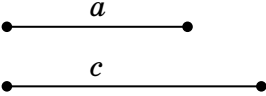
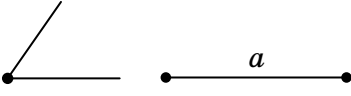
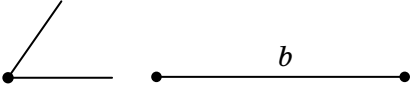
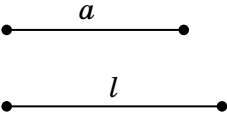
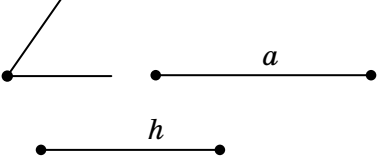
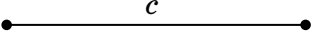
Важно знать:

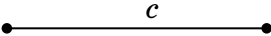
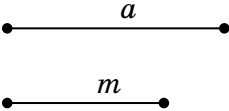
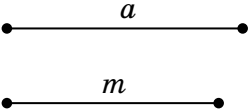
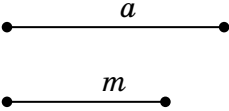
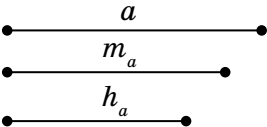
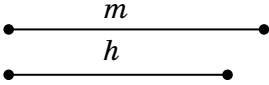
- Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° .
- **Признаки равенства прямоугольных треугольников:**
 - ♦ если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны;
 - ♦ если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Задание 46. Найдите x по данным чертежа.

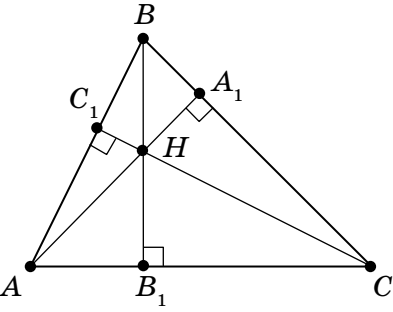
1) Ответ: _____	2) Ответ: _____	3) Ответ: _____
4) Ответ: _____	5) $AC = BC = BN$ Ответ: _____	6) Ответ: _____
7) Ответ: _____	8) Ответ: _____	9) Ответ: _____

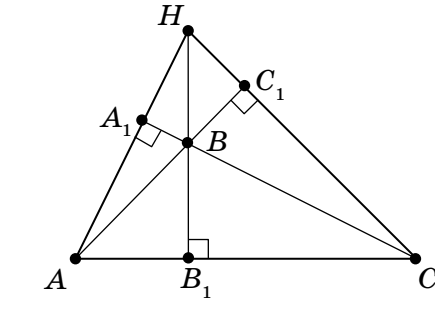
Задание 47. Выполните построение, используя циркуль и линейку.

1) Постройте прямоугольный треугольник по катету a и гипотенузе c 	2) Постройте прямоугольный треугольник по катету a и прилежащему к нему углу 
3) Постройте прямоугольный треугольник по катету b и противолежащему ему углу 	4) Постройте прямоугольный треугольник по катету a и биссектрисе l прилежащего этому катету угла 
5) Постройте треугольник по стороне a, прилежащему к этой стороне углу и высоте h, проведённой к этой стороне 	6) Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c, так, чтобы треугольник был равнобедренным 

7) Постройте прямоугольный треугольник с углом 30° по гипотенузе c 	8) Постройте прямоугольный треугольник по катету a и медиане m, проведённой к гипотенузе 
9) Постройте прямоугольный треугольник по катету a и медиане m, проведённой к этому катету 	10) Постройте прямоугольный треугольник по катету a и медиане m, проведённой ко второму катету 
11) Постройте треугольник по стороне a и медиане m_a и высоте h_a, проведённым к этой стороне 	12) Постройте прямоугольный треугольник по высоте h и медиане m, проведёнными к гипотенузе 

Задание 48. Заполните пропуски в таблице.

1)		$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle A_1HC$	$\angle AHB_1$	$\angle C_1HA_1$	$\angle C_1BH$
		40°	60°					
						60°		40°
				70°			105°	
				64°	69°			
		80°					130°	
			40°					30°

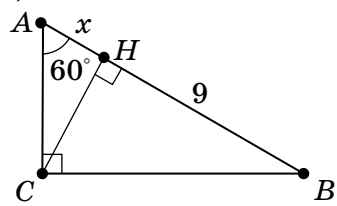
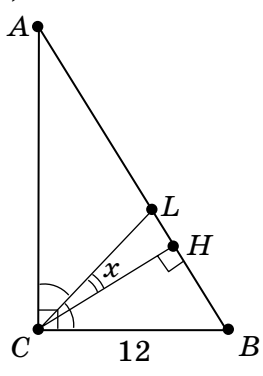
2)		$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle B_1BC$	$\angle BHC$	$\angle BAH$	$\angle C_1CA$
			100°	40°				
					70°	50°		
		55°					5°	
			120°			30°		
				25°				55°
						25°	50°	

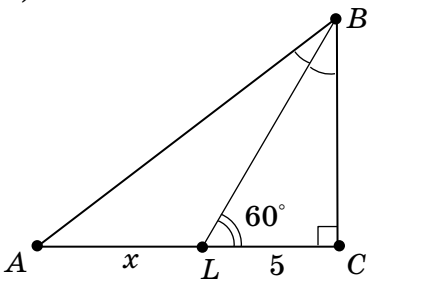


Важно знать:

- Катет прямоугольного треугольника, лежащий напротив угла в 30° , равен половине гипотенузы.
- Если в прямоугольном треугольнике катет вдвое меньше гипотенузы, то угол, лежащий напротив этого катета, равен 30° .
- Если в треугольнике одна сторона вдвое меньше другой и угол между этими сторонами равен 60° , то треугольник – прямоугольный.

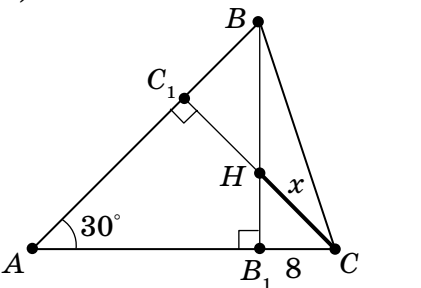
Задание 49. По данным чертежа найдите неизвестную величину, запишите краткое решение.

1)	Решение:	2) $AB = 24$	Решение:
			
Ответ: _____		Ответ: _____	

3) 

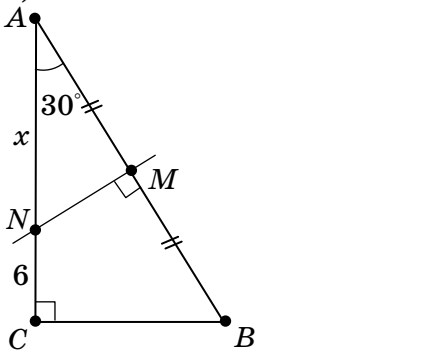
Решение:

Ответ: _____

4) 

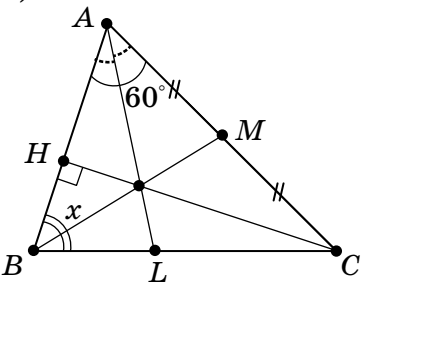
Решение:

Ответ: _____

5) 

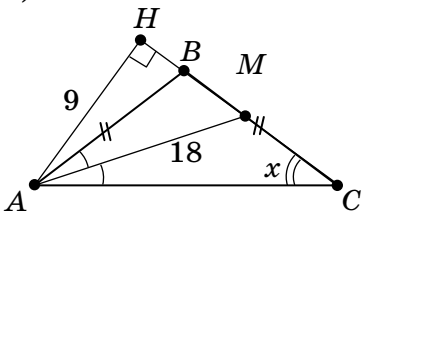
Решение:

Ответ: _____

6) 

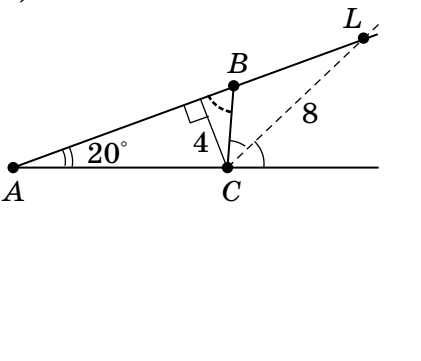
Решение:

Ответ: _____

7) 

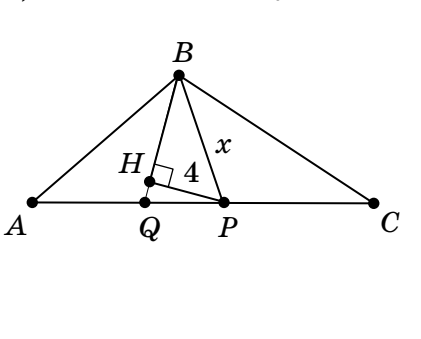
Решение:

Ответ: _____

8) $\angle ABC = x$ 

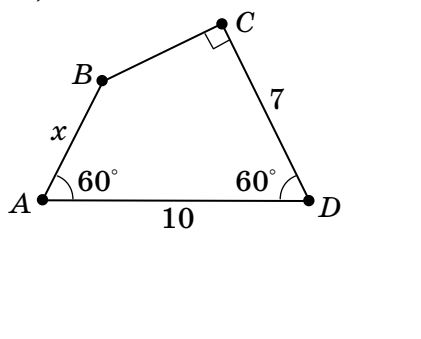
Решение:

Ответ: _____

9) $AB = AP, BC = CQ, \angle ABC = 120^\circ$ 

Решение:

Ответ: _____

10) 

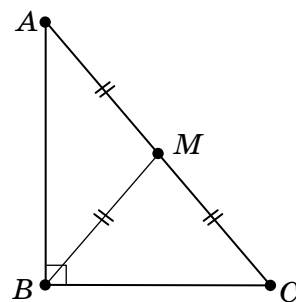
Решение:

Ответ: _____



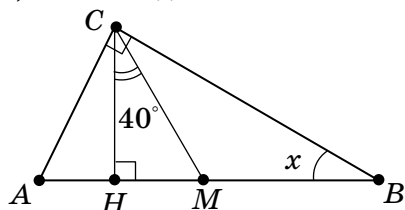
Важно знать:

- Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.
- Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник – прямоугольный.



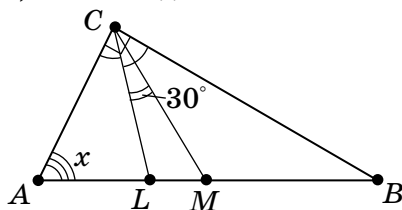
Задание 50. Найди неизвестную величину по данным чертежа.

1) CM – медиана $\triangle ABC$



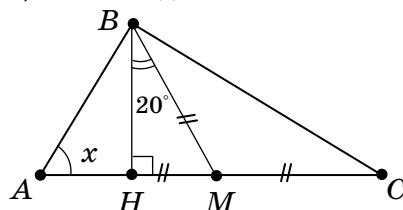
Ответ: _____

2) CM – медиана $\triangle ABC$



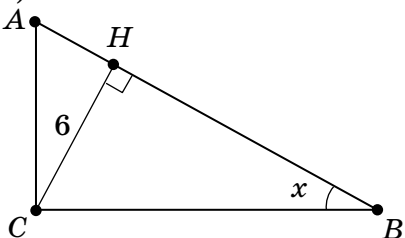
Ответ: _____

3) BM – медиана $\triangle ABC$



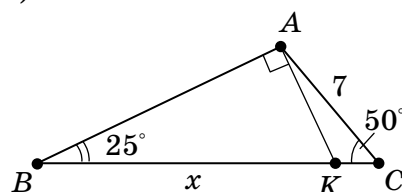
Ответ: _____

4) $AB = 24$



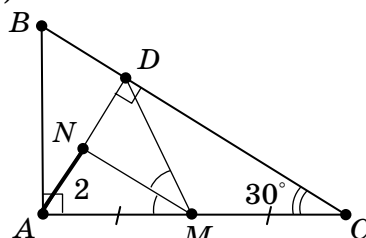
Ответ: _____

5)



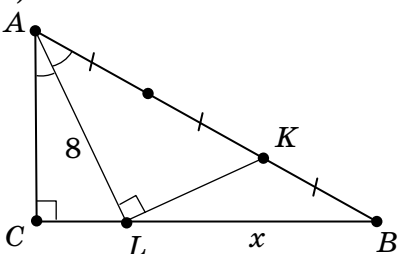
Ответ: _____

6) $AC = x$



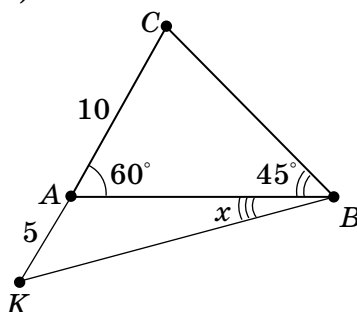
Ответ: _____

7)



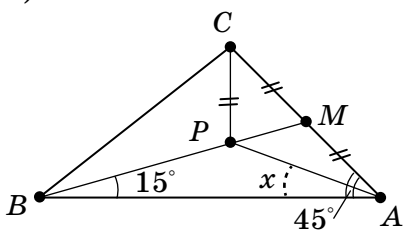
Ответ: _____

8)



Ответ: _____

9)



Ответ: _____

10)

Ответ: _____

11)

Ответ: _____

12)

Ответ: _____

Задание 51. Найдите x , применив метод «удвоения медианы». Запишите решение.

Пример:

Решение: удвоим медиану BM , получим рисунок (справа):
 $\triangle ABB'$ – равнобедренный, поэтому $\angle AB'B = \frac{1}{2}(180^\circ - 38^\circ) = 71^\circ$.
 $\triangle AB'M = \triangle CBM$ (по двум сторонам и углу). Откуда получаем $x = 71^\circ$.

Ответ: 71°

1) $\angle ABC = 110^\circ$

Решение:

Ответ: _____

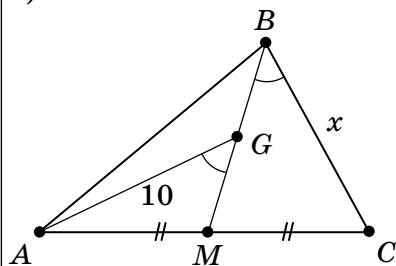
2)

Решение:

Ответ: _____

3)

Решение:

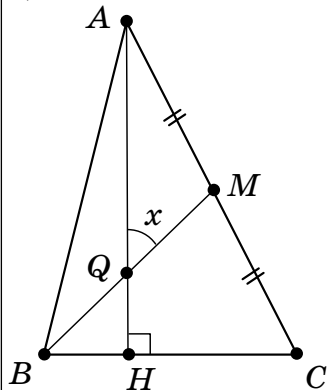


Ответ: _____

4)

$AQ = BC$

Решение:

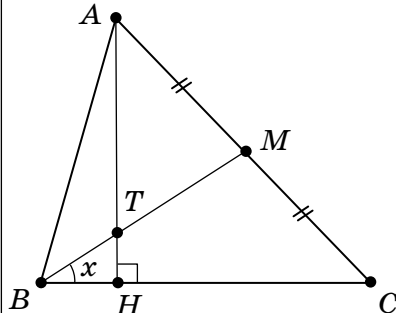


Ответ: _____

5)

$AH = BM$

Решение:

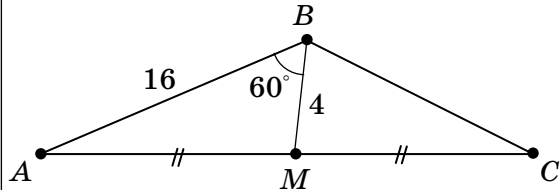


Ответ: _____

6)

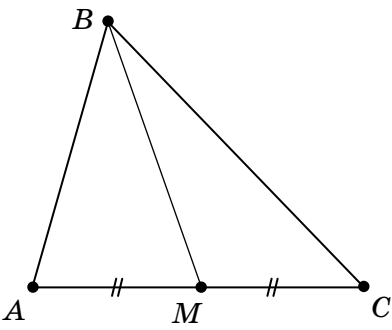
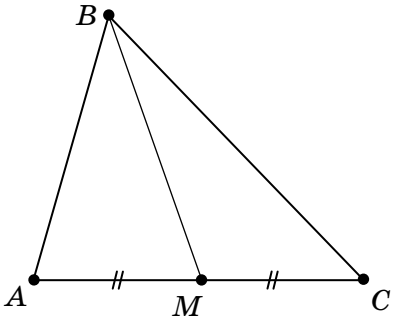
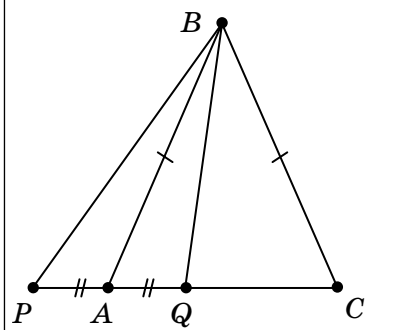
$\angle ABC = x$

Решение:

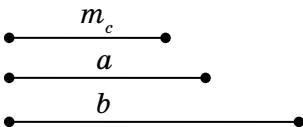
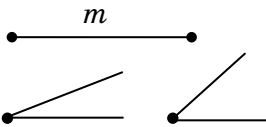


Ответ: _____

Задание 52. Используя метод «удвоения медианы», докажите неравенства, запишите решение.

1) Докажите: $BM < \frac{BA + BC}{2}$ 	2) $BC > BA$. Докажите: $\angle MBC < \angle MBA$ 	3) Докажите: $BP + BQ > BA + BC$ 
---	--	--

Задание 53. Постройте треугольник, используя циркуль и линейку.

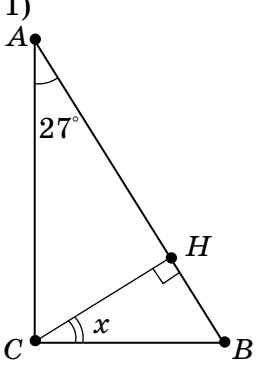
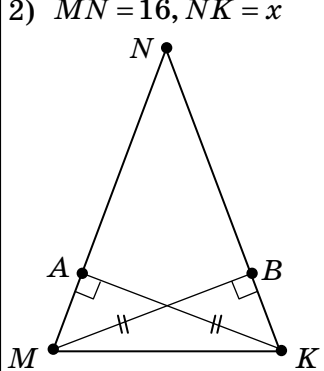
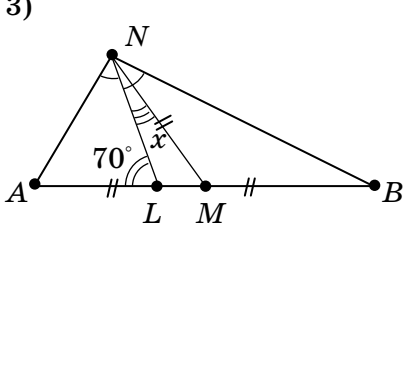
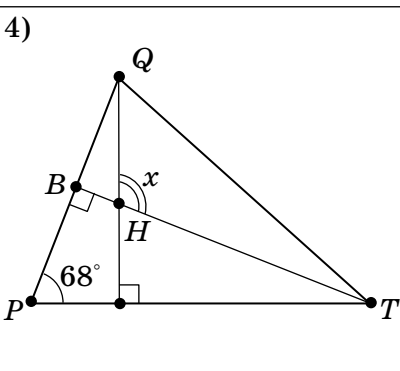
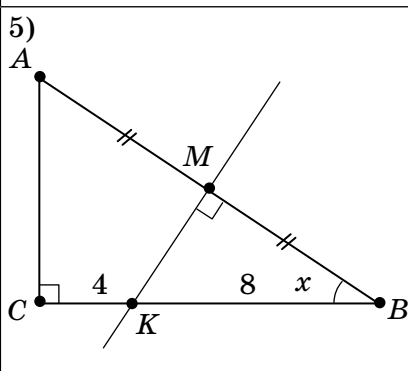
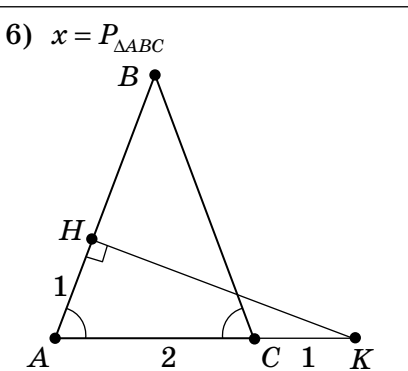
1) По двум сторонам a и b и медиане m_c, исходящими из одной вершины. 	2) По медиане m и двум углам, которые эта медиана образует со сторонами, исходящими из той же вершины. 
--	--

Задание 54. Проверьте себя.

А) Является ли треугольник прямоугольным, если...

1) ...сумма двух углов треугольника равна 90° ?	
2) ...один из его углов в 3 раза больше одного из оставшихся и в 1,5 раза больше другого?	
3) ...одна его сторона в два раза меньше другой, а угол между этими сторонами равен 60° ?	
4) ...медиана этого треугольника равна половине стороны, к которой она проведена?	
5) ...одна из его медиан разбивает треугольник на два равнобедренных треугольника?	
6) ...одна из его высот разбивает треугольник на два равных равнобедренных треугольника?	
7) ...одна из его биссектрис разбивает треугольник на два равных равнобедренных треугольника?	
8) ...один из углов треугольника равен сумме двух других углов?	
9) ...одна из сторон треугольника вдвое меньше стороны, к которой она проведена?	
10) ...середина одной из сторон находится на равном расстоянии от всех вершин треугольника?	

Б) По данным чертежа найдите x .

1)  Ответ: _____	2) $MN = 16, NK = x$  Ответ: _____	3)  Ответ: _____
4)  Ответ: _____	5)  Ответ: _____	6) $x = P_{\triangle ABC}$  Ответ: _____

ОКРУЖНОСТИ

ОБОБЩЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ СВЕДЕНИЙ ОБ ОКРУЖНОСТИ И ЕЁ ЭЛЕМЕНТАХ

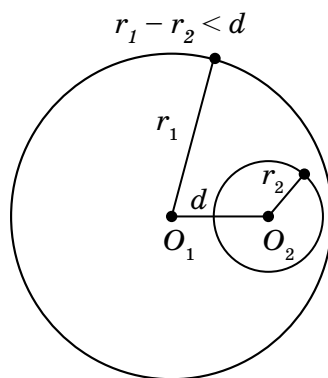
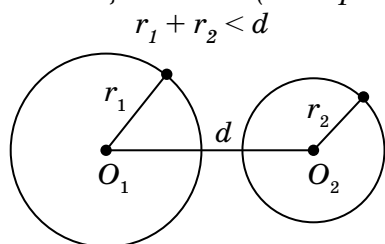
Задание 55. По данным чертежа найдите x .

1) Ответ: _____	2) Ответ: _____	3) Ответ: _____	4) Ответ: _____
5) Ответ: _____	6) Ответ: _____	7) Ответ: _____	8) Ответ: _____
9) Ответ: _____	10) Ответ: _____	11) Ответ: _____	12) Ответ: _____

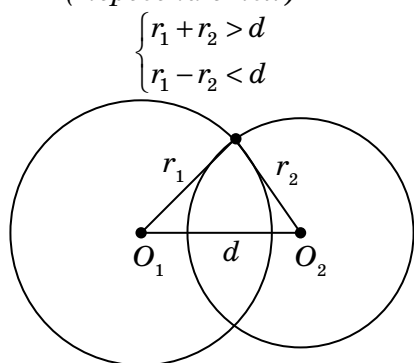


Важно знать:

- Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами r_1 и r_2 ($r_1 \geq r_2$) могут:
 - ♦ не иметь общих точек (не пересекаются)

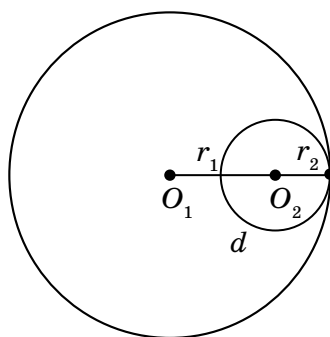


- ♦ иметь две общие точки (пересекаются)

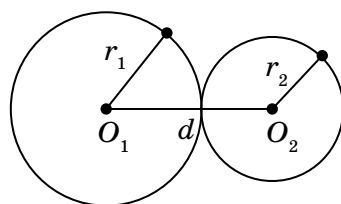


- ♦ иметь одну общую точку (касаются)

$r_1 + r_2 = d$



$r_1 - r_2 = d$

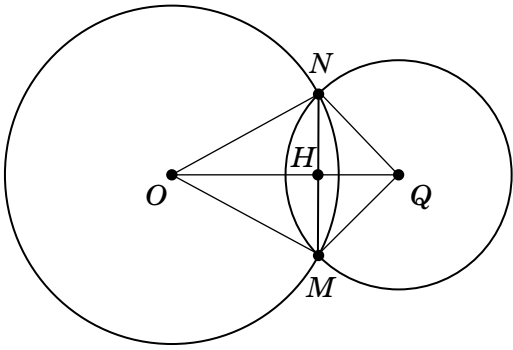
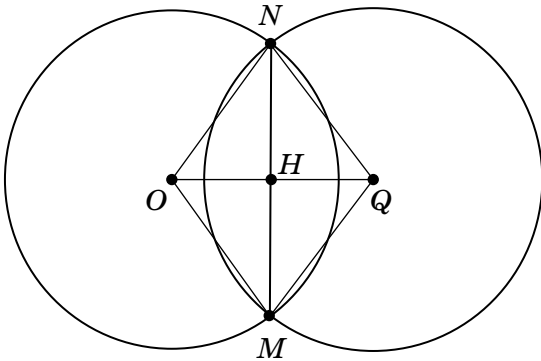
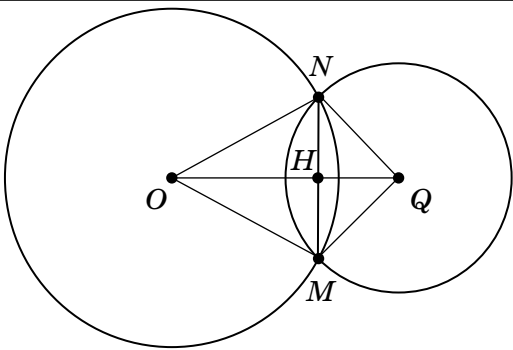
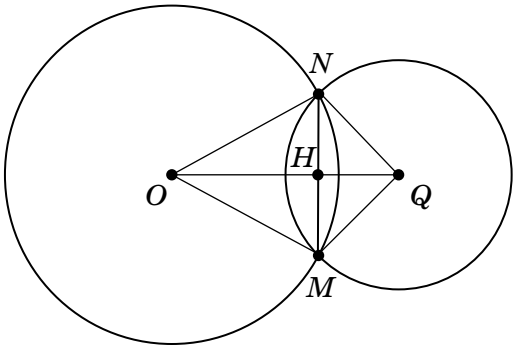


Задание 56. Определите взаимное положение двух окружностей, если известны их радиусы r_1 и r_2 и расстояние d между их центрами. Сделайте иллюстрацию.

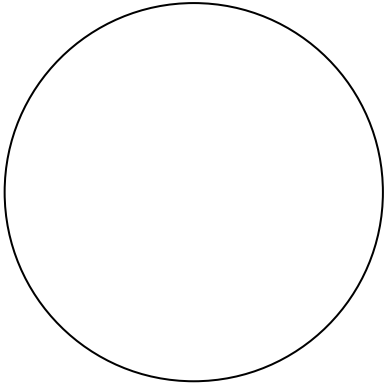
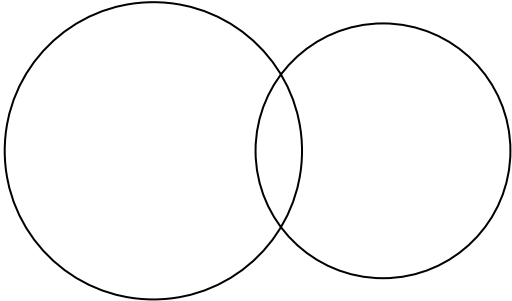
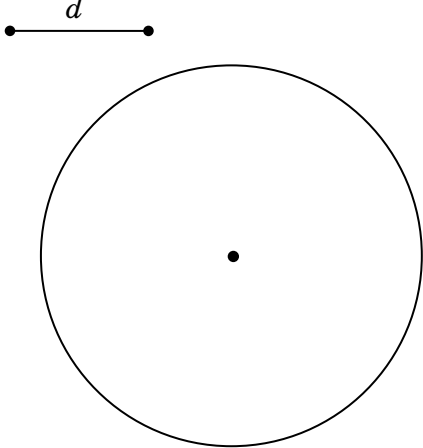
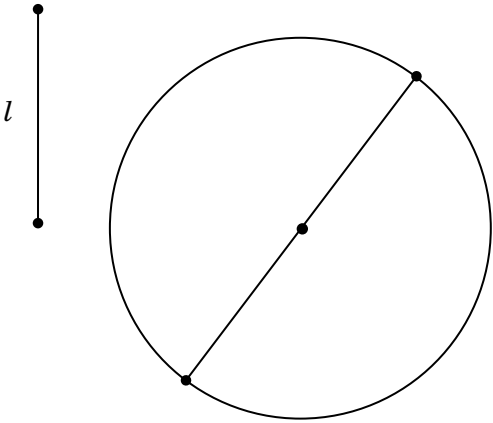
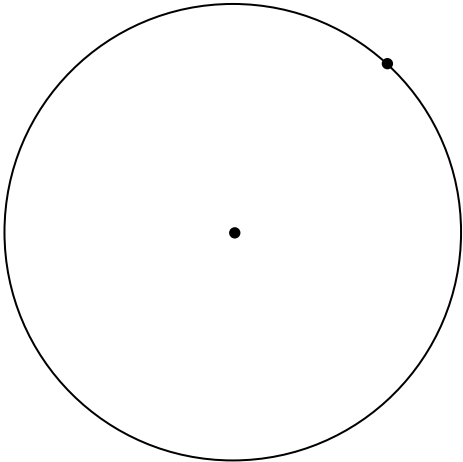
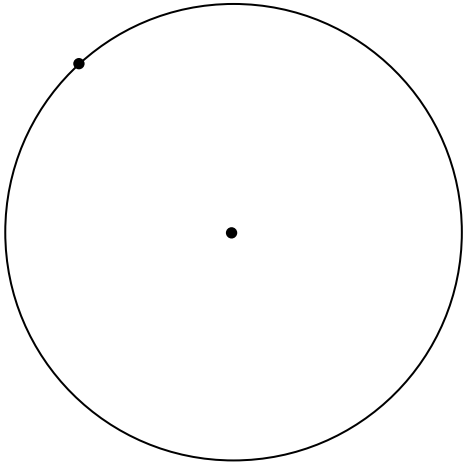
	пересекаются	не пересекаются	касаются
Пример: $r_1 = 8,$ $r_2 = 6,$ $d = 10$			
1) $r_1 = 8,$ $r_2 = 8,$ $d = 12$			
2) $r_1 = 6,$ $r_2 = 6,$ $d = 10$			

3) $r_1 = 3$, $r_2 = 6$, $d = 12$			
4) $r_1 = 4$, $r_2 = 6$, $d = 10$			
5) $r_1 = 15$, $r_2 = 5$, $d = 10$			
6) $r_1 = 12$, $r_2 = 6$, $d = 3$			
7) $r_1 = 6$, $r_2 = 10$, $d = 8$			
8) $r_1 = 6$, $r_2 = 6$, $d = 6$			
9) $r_1 = 5$, $r_2 = 5$, $d = 10$			

Задание 57. Выполните задания.

1) Даны произвольные пересекающиеся окружности	
	1) докажите: $\angle NQO = \angle MQO$
	2) докажите: $\angle MOQ = \angle NOQ$
	3) докажите: $MN \perp OQ$
	4) докажите: $NH = HM$
2) Известно, что $QN = NO = OQ = 18$	
	1) найдите $\angle ONQ$
	2) найдите $\angle NQM$
	3) докажите: $OH = HQ$
	4) найдите OH
3) Известно, что $OQ = 2NQ = 6, \angle NQO = 60^\circ$	
	1) найдите $\angle OMQ$
	2) найдите $\angle NOQ$
	3) найдите $\angle HMQ$
	4) найдите HQ
4) Известно, что $\angle NOQ = 30^\circ, \angle HOM = 45^\circ, HQ = 12$	
	1) найдите $\angle ONQ$
	2) найдите OM
	3) найдите MN
	4) найдите $\angle NQM$

Задание 58. Выполните задания, используя циркуль и линейку.

1) Постройте центр данной окружности 	2) Постройте линию центров двух окружностей (прямую, проходящую через центры окружностей) 
3) Постройте одну хорду данной окружности, отстоящую от центра на расстояние d 	4) Постройте одну хорду данной окружности, равную отрезку l, перпендикулярную данному диаметру 
5) Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, вершины которого лежат на данной окружности, причём вершина прямого угла – в данной точке. 	6) Постройте равносторонний треугольник, вершины которого лежат на данной окружности, причём одна вершина – в данной точке. 

КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ



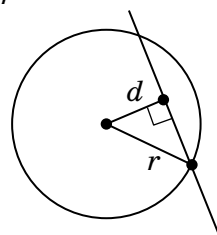
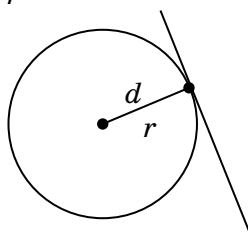
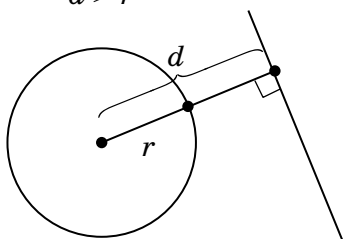
Важно знать:

• Прямая и окружность могут

♦ не иметь общих точек $d > r$

♦ иметь одну общую точку $d = r$

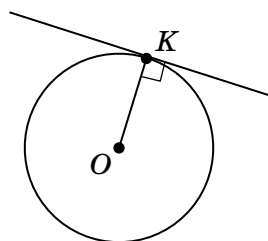
♦ иметь две общие точки $d < r$



Важно знать:

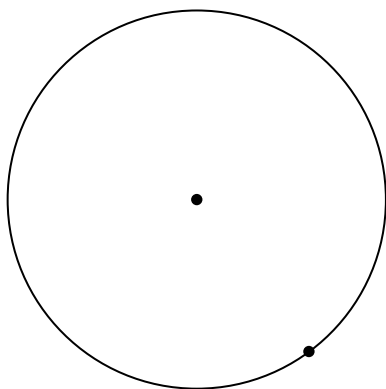
• Касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведённому в точку касания (**свойство касательной**).

• Прямая касается окружности, если она проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна этому радиусу (**признак касательной**).

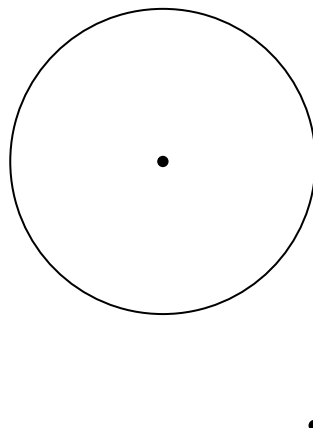


Задание 59. Постройте с помощью циркуля и линейки касательную к данной окружности, проходящую через данную точку.

1)



2)



Задание 60. Вставьте вместо пропусков слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно»

1) Для того, чтобы прямая касалась окружности, _____, чтобы она проходила через конец диаметра.

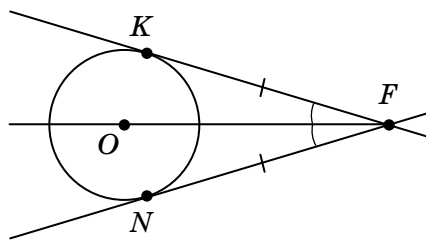
2) Для того, чтобы прямая касалась окружности, _____, чтобы она была перпендикулярна какому-то радиусу этой окружности.

3) Для того, чтобы прямая касалась окружности, _____, чтобы она находилась на расстоянии, равном радиусу, от центра окружности.



Важно знать:

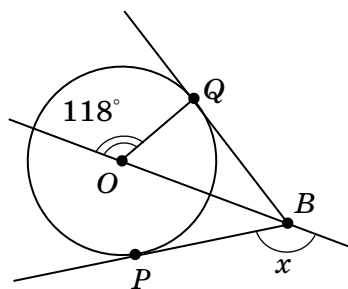
- Отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности, равны, и образуют равные углы с прямой, проходящей через данную точку и центр окружности.



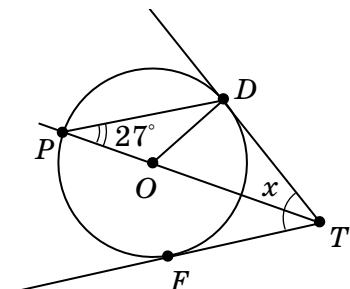
Задание 61. Из точки вне окружности к ней проведены касательные. По данным чертежа найдите x . Запишите решение.

1) Ответ: _____	2) Ответ: _____	3) Ответ: _____
4) Ответ: _____	5) Ответ: _____	6) Ответ: _____

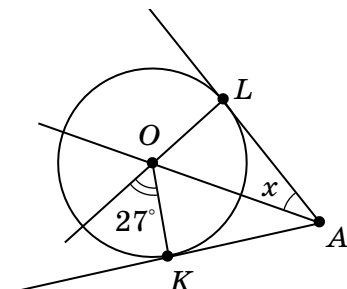
7)



8)



9)

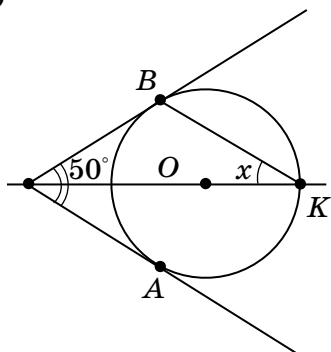


Ответ: _____

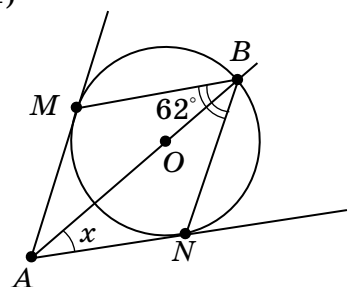
Ответ: _____

Ответ: _____

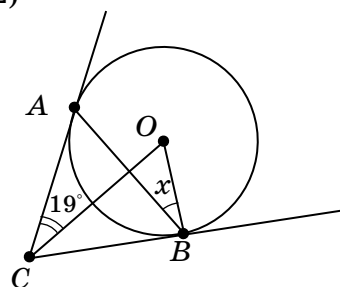
10)



11)



12)



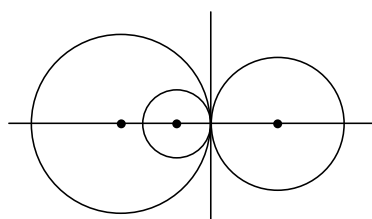
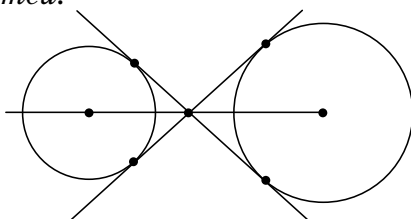
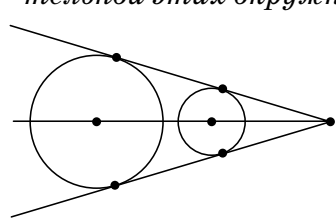
Ответ: _____

Ответ: _____

Ответ: _____

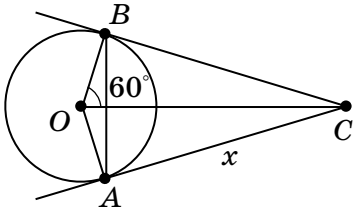
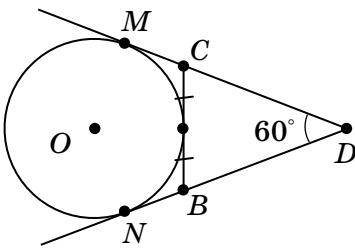
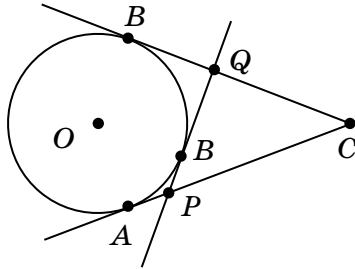
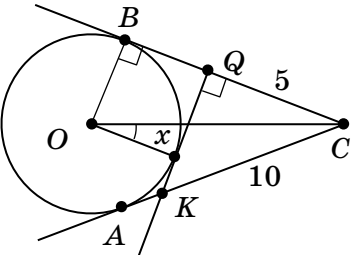
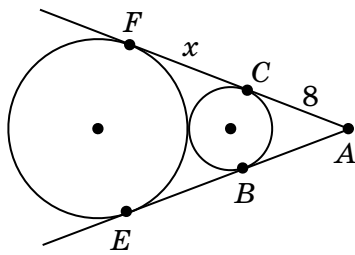
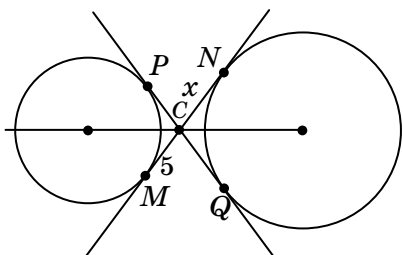
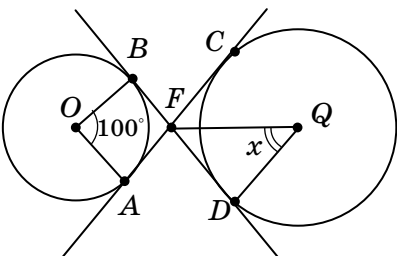
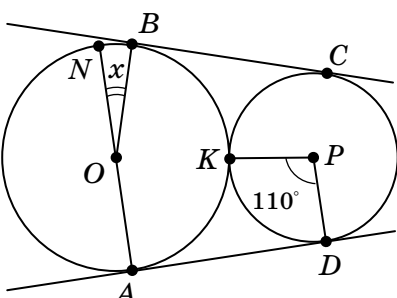
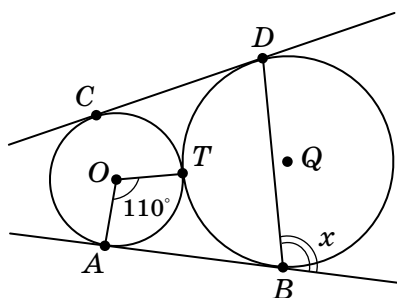
**Важно знать:**

- Прямая, которая касается двух (и более) окружностей, называется общей касательной этих окружностей.



- Точки пересечения двух внешних и двух внутренних касательных лежат на линии центров окружностей; в случае касания окружностей – общая касательная проходит через точку касания (которая тоже лежит на линии центров).

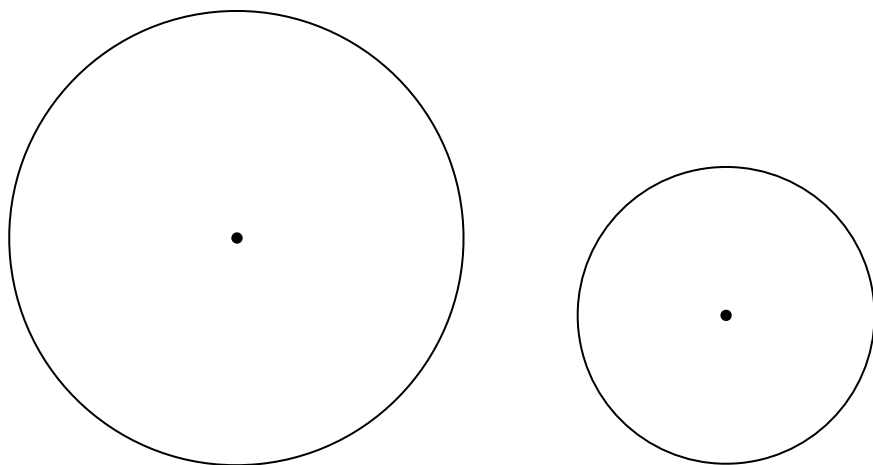
Задание 62. По данным чертежа найдите x .

1) $P_{\triangle ABC} = 30$  Ответ: _____	2) $P_{\triangle BCD} = 36, DM = x$  Ответ: _____	3) $AC = 10, P_{\triangle PQC} = x$  Ответ: _____
4)  Ответ: _____	5) $AE = 18$  Ответ: _____	6) $PQ = 12$  Ответ: _____
7)  Ответ: _____	8)  Ответ: _____	9)  Ответ: _____

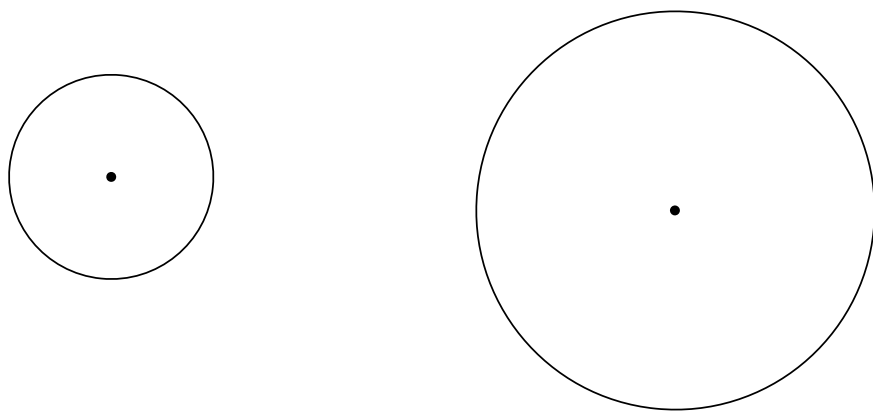
10) Ответ: _____	11) Ответ: _____	12) Ответ: _____
--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------

Задание 63. Выполните построение при помощи циркуля и линейки.

1) Постройте одну общую внешнюю касательную к данным окружностям



2) Постройте одну общую внутреннюю касательную к данным окружностям



Задание 64. Проверьте себя. Отметьте галочками верные утверждения.

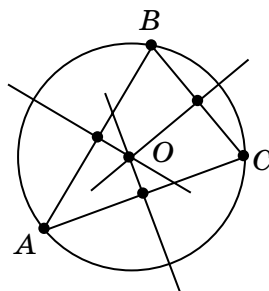
1) В окружности радиуса 1 есть хорда длиной 2.	
2) В окружности радиуса 2 есть хорда длиной 5.	
3) В каждой окружности есть самая большая хорда.	
4) В каждой окружности есть хорда, равная радиусу.	
5) Если хорда перпендикулярна диаметру, то диаметр делит эту хорду пополам.	
6) Угол, вершина которого лежит на данной окружности, а стороны проходят через концы диаметра этой окружности, – прямой.	
7) В каждой окружности найдутся две равные перпендикулярные хорды с общим концом.	
8) Если хорды окружности равны, то они равноудалены от центра окружности.	
9) В каждой окружности найдутся две равные хорды с общим концом, каждая из которых больше радиуса окружности.	
10) Если две хорды окружности параллельны, то они находятся на равном расстоянии от центра окружности.	
11) Прямая, перпендикулярная радиусу окружности, и проходящая через его конец, является касательной к этой окружности.	
12) У любых не касающихся окружностей есть 4 общие касательные.	
13) Две окружности касаются, если радиус одной из них в 2 раза больше радиуса другой, а расстояние между их центрами вдвое больше радиуса меньшей окружности.	
14) Две окружности пересекаются, если сумма их радиусов больше расстояния между их центрами.	
15) Общая касательная двух касающихся окружностей перпендикулярна линии центров этих окружностей.	
16) Если две пересекающиеся вне окружности прямые образуют равные углы с прямой, проходящей через точку пересечения и центр окружности, то эти две прямые – касательные к окружности.	
17) Если к двум окружностям проведены две касательные, то точка их пересечения лежит на линии центров этих окружностей.	
18) Если окружности имеют ровно одну общую касательную, то такие окружности касаются.	
19) Существуют окружности, не имеющие общих касательных.	
20) Две касательные к данной окружности всегда имеют общую точку.	
21) Если две окружности пересекаются, то точки пересечения симметричны относительно линии центров этих окружностей.	
22) Внешняя общая касательная может быть перпендикулярна внутренней общей касательной этих окружностей.	

ОКРУЖНОСТЬ И ТРЕУГОЛЬНИК



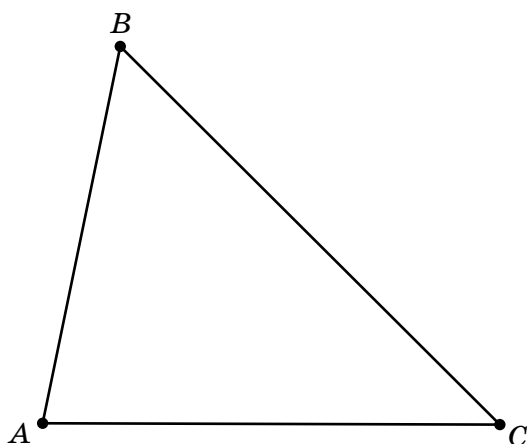
Важно знать:

- Если все вершины треугольника лежат на окружности, **треугольник называется вписанным** в окружность, а окружность – описанной около треугольника.
- Около любого треугольника можно описать окружность, и при том только одну. Поскольку центр окружности будет равноудалён от всех вершин треугольника, он располагается на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

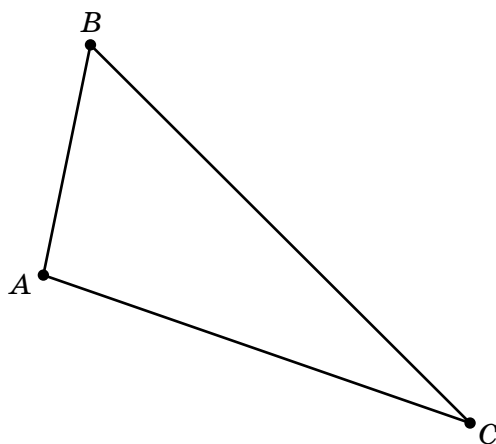


Задание 65. При помощи циркуля и линейки постройте окружность, описанную около треугольника ABC . Сколько серединных перпендикуляров к сторонам треугольника достаточно построить? От чего зависит положение центра такой окружности?

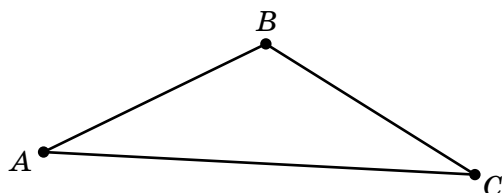
1)



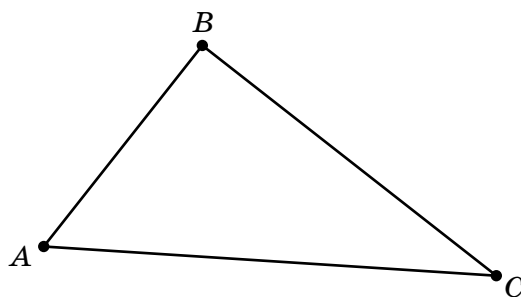
2)



3)



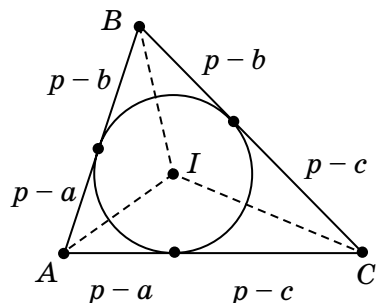
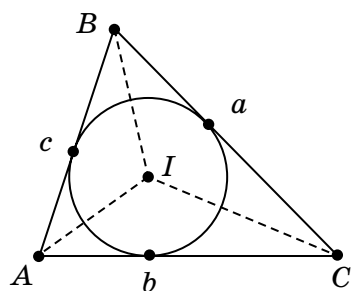
4)



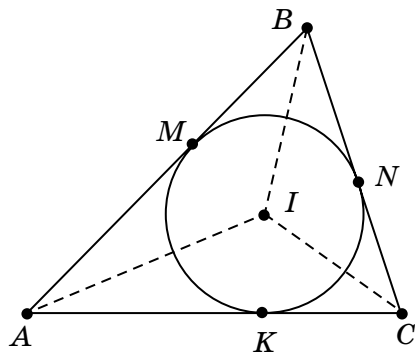


Важно знать:

- Если все стороны треугольника касаются окружности, то **треугольник называется описанным** вокруг окружности, а окружность – **вписанной** в треугольник.
- В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Поскольку центр окружности будет равноудалён от все сторон треугольника, он располагается на пересечении биссектрис углов треугольника.
- Если стороны треугольника равны a, b, c и полупериметр равен p , то отрезки сторон треугольника от вершин до точек касания с вписанной окружностью вычисляются как разность полупериметра и противоположной стороны.



Задание 66. Заполните пропуски в таблице.



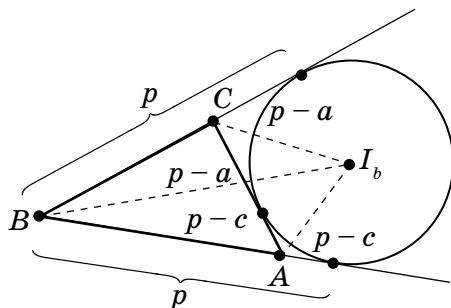
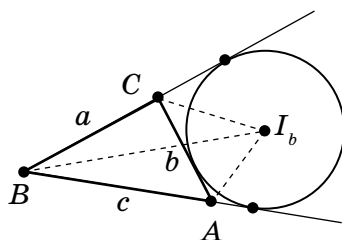
Место для вычислений

		BC	AC	AB	AK	BN	CK
1)	5	6	7				
2)	8	8	12				
3)		10	10	6			
4)	13		16			11	
5)	12				4		5
6)					6	7	8
7)		19				12	1

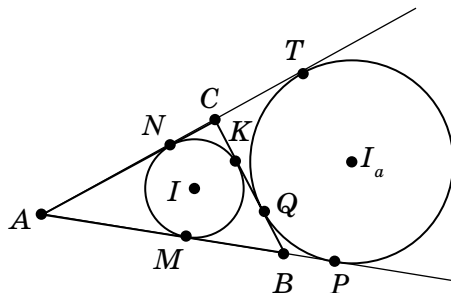


Важно знать:

- Если окружность касается стороны треугольника и продолжений двух других сторон, то она называется **внеписанной окружностью** этого треугольника с выбранной стороны (на рисунке показана внеписанная окружность $\triangle ABC$ со стороны AC).
- Если стороны треугольника равны a, b, c и полупериметр равен p , то отрезки сторон треугольника от вершин до точек касания с вписанной окружностью можно выразить через полупериметр и стороны треугольника (см. рисунок).



Задание 67. Дан $\triangle ABC$, его вписанная и одна внеписанная окружность (см. рисунок). Выполните задания, заполнив пропуски в таблице.



	Место для вычислений	BC	AC	AB	AT	BQ	QK	MB
1)		6	7	8				
2)		12			20	5		
3)				16	20		12	
4)			15			7		9

	Место для вычислений	BC	AC	AB	BK	CT	BP	NT
5)		13	5	12				
6)		20			10			10
7)			20			10		9
8)				20	5		10	

Задание 68. Дан $\triangle ABC$, его вписанная и одна внешняя окружность (см. рисунок). Найдите неизвестные углы, если $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ACB = 80^\circ$. Запишите краткое решение.

1) $\angle B I I_a$

Ответ: _____

2) $\angle B I C$

Ответ: _____

4) $\angle B C I_a$

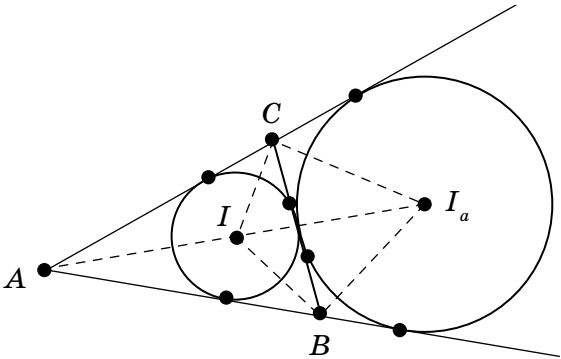
Ответ: _____

3) $\angle B I_a C$

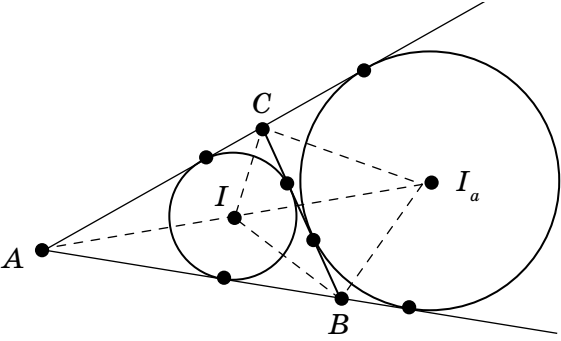
Ответ: _____

5) $\angle I I_a C$

Ответ: _____



Задание 69. Дан $\triangle ABC$, его вписанная и одна внеписанная окружность (см. рисунок). Найдите неизвестные углы, если $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle ACB = 80^\circ$. Запишите краткое решение.

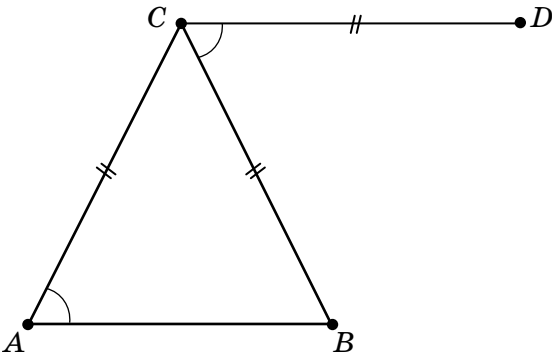
	1) $\angle ICI_a$ Ответ: _____
2) $\angle BIC$ Ответ: _____	3) $\angle ICB$ Ответ: _____
4) $\angle CBI_a$ Ответ: _____	5) $\angle AI_aB$ Ответ: _____
6) $\angle CIA$ Ответ: _____	7) $\angle BCI_a$ Ответ: _____

Задание 70. Пользуясь рисунком задания 69 для треугольника $\triangle ABC$ с углами $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, найдите величины углов.

1) $\angle IBI_a$ Ответ: _____	2) $\angle BIC$ Ответ: _____	3) $\angle BI_aC$ Ответ: _____
---	---	---

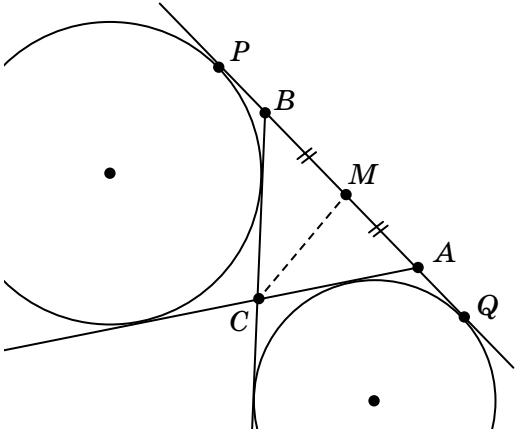
Задание 71. Выполните задания.

1) Докажите, что D – центр вневписанной окружности $\triangle ABC$ со стороны BC



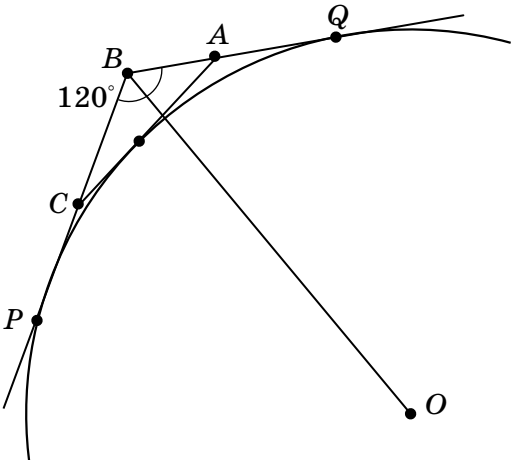
Решение:

2) Докажите, что $MP = MQ$



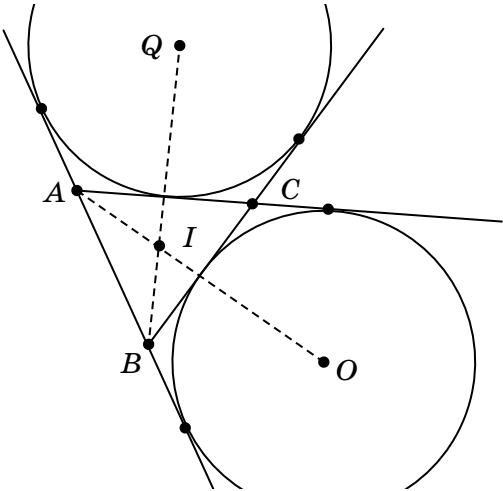
Решение:

3) Докажите, что $OB = P_{\triangle ABC}$



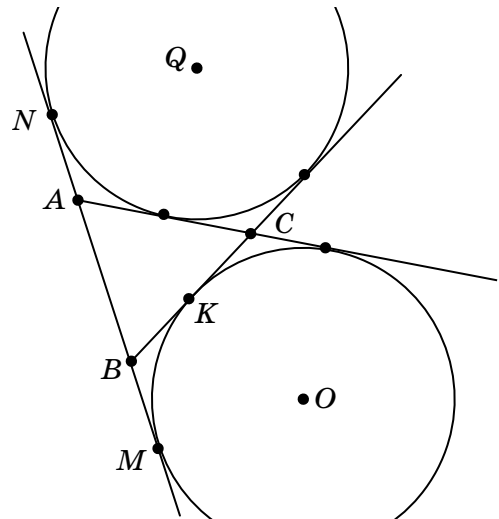
Решение:

4) Докажите, что $OQ \perp CI$



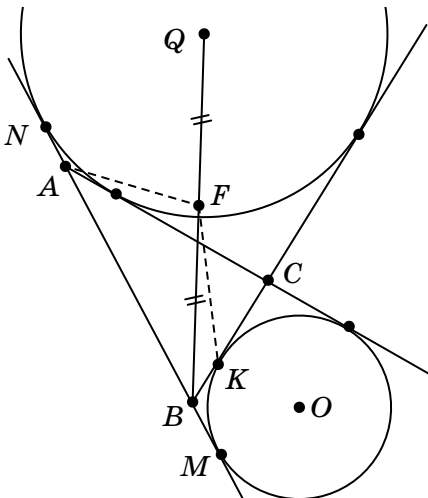
Решение:

5) Докажите, что $AN = BK$



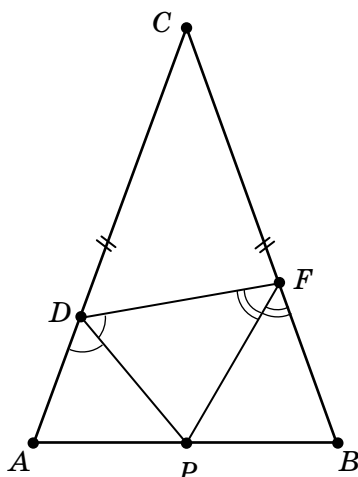
Решение:

6) Докажите, что $AF = FK$



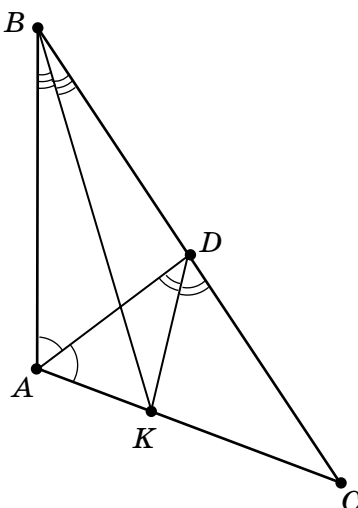
Решение:

7) Докажите, что P – середина AB



Решение:

8) Найдите величину угла BAC



Решение:

Задание 72. Проверьте себя.

А) Ответьте на вопросы

1) Может ли центр описанной вокруг треугольника окружности находиться вне треугольника?	
2) Радиус описанной вокруг треугольника окружности вдвое меньше одной из его сторон. Чему равен наибольший угол треугольника?	
3) Может ли центр вписанной в треугольник окружности находиться вне треугольника?	
4) Центр описанной вокруг треугольника окружности совпадает с центром вписанной в треугольник окружности. Чему равны углы этого треугольника?	
5) Могут ли 3 точки – вершина треугольника, центр вписанной в него окружности и центр описанной вокруг него окружности – лежать на одной прямой?	
6) В равностороннем треугольнике радиус вписанной окружности равен 5. Чему равен радиус описанной вокруг этого треугольника окружности?	
7) Могут ли 3 точки – центр вписанной в треугольник окружности, центр одной невписанной окружности и центр описанной вокруг него окружности – лежать на одной прямой?	
8) Могут ли центры трёх невписанных окружностей данного треугольника являться вершинами равностороннего треугольника?	
9) Рассматривается треугольник с вершинами в центрах невписанных окружностей данного треугольника. Может ли полученный треугольник быть прямоугольным?	
10) Чему может быть равен угол между отрезками, проведёнными из вершины треугольника в центр его вписанной и в центр его невписанной окружности?	

Б) Выполните задания

1) В равнобедренный треугольник вписана окружность. Докажите, что она касается основания треугольника в его середине. Решение: Чертёж:
2) Дан равнобедренный треугольник. Высота треугольника, проведённая к основанию, равна 12. Найдите радиус его вневписанной окружности с боковой стороны. Решение: Чертёж:

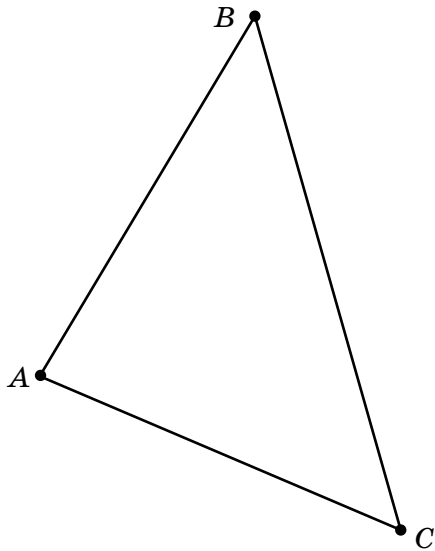
ПОВТОРЕНИЕ И ОБОБЩЕНИЕ. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

Задание 73. Вместо пропусков вставьте слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно».

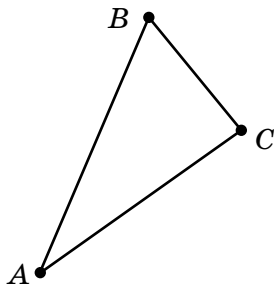
- 1) Для того, чтобы два угла в сумме давали 180° _____, чтобы эти углы были смежными.
- 2) Для того, чтобы два угла были вертикальными _____, чтобы они были равны.
- 3) Для того, чтобы два угла были равны _____, чтобы они были вертикальными.
- 4) Для того, чтобы две прямые были параллельными _____, чтобы накрест лежащие углы при пересечении этих прямых секущей были равны.
- 5) Для того, чтобы два угла в сумме составляли 180° _____, чтобы они были односторонними при пересечении параллельных прямых секущей.
- 6) Для того, чтобы точка, лежащая внутри угла, лежала на биссектрисе этого угла _____, чтобы она была равноудалена от сторон угла.
- 7) Для того, чтобы точка была равноудалена от концов отрезка _____, чтобы она лежала на серединном перпендикуляре к этому отрезку.
- 8) Для того, чтобы два треугольника были равны _____, чтобы медианы этих треугольников, проведённые к соответственным сторонам, были равны.
- 9) Для того, чтобы два треугольника были равны _____, чтобы две стороны и угол одного треугольника были равны двум сторонам и углу другого треугольника.
- 10) Для того, чтобы два треугольника были равны _____, чтобы сторона, прилежащий к ней угол и проведённая к ней медиана одного треугольника были равны стороне, прилежащему к ней углу и проведённой к ней медиане другого треугольника.
- 11) Для того, чтобы два треугольника были равны _____, чтобы две биссектрисы одного треугольника были соответственно равны двум биссектрисам другого треугольника.
- 12) Для того, чтобы треугольник был равнобедренным _____, чтобы два его угла были равны.
- 13) Для того, чтобы треугольник был равнобедренным _____, чтобы у него были равны высота и биссектриса.
- 14) Для того, чтобы треугольник был равнобедренным _____, чтобы одна его биссектриса делила пополам сторону, к которой она проведена.
- 15) Для того, чтобы треугольник был равнобедренным _____, чтобы два его угла были равны 50° и 80° .
- 16) Для того, чтобы треугольник был прямоугольным _____, чтобы одна его медиана была равна половине стороны.
- 17) Для того, чтобы прямая была касательной к окружности _____, чтобы она была перпендикулярна радиусу окружности.
- 18) Для того, чтобы две окружности касались _____, чтобы разность радиусов этих окружностей была равна расстоянию между их центрами.

Задание 74. Выполните построения циркулем и линейкой.

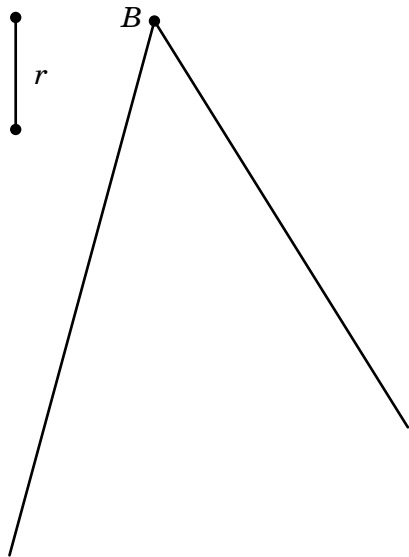
1) Постройте окружность, вписанную в данный треугольник



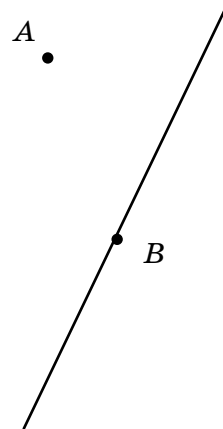
2) Постройте внеписанную окружность данного треугольника со стороны AC



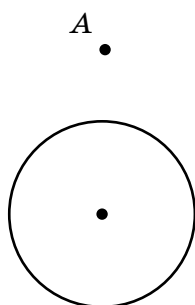
3) Постройте окружность данного радиуса r , касающуюся сторон данного угла



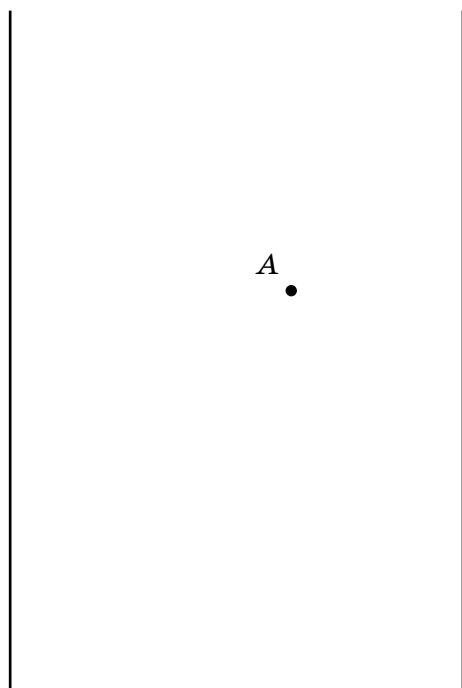
4) Постройте окружность, проходящую через данную точку A так, чтобы она касалась данной прямой в точке B



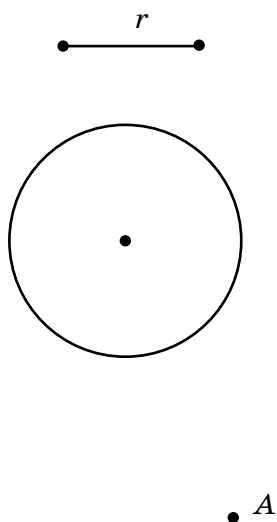
5) Постройте окружность, проходящую через данную точку A так, чтобы она касалась данной окружности



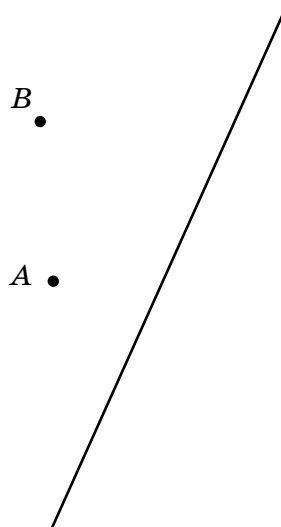
6) Даны две параллельные прямые и точка A . Постройте окружность, проходящую через эту точку и касающуюся прямых.



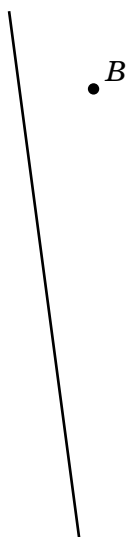
7) Постройте одну окружность радиуса r так, чтобы она проходила через точку A и касалась данной окружности



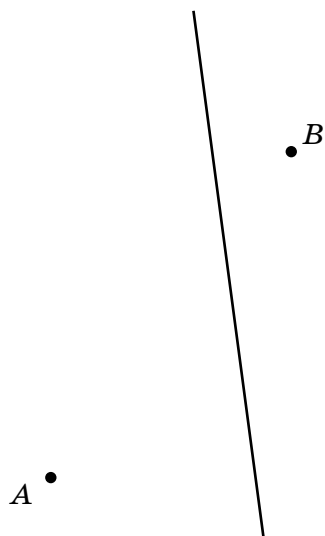
8) Постройте окружность с центром на данной прямой и проходящей через точки A и B



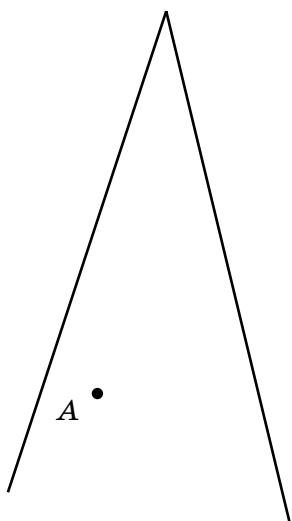
9) Постройте на прямой точку C так, чтобы сумма $AC + CB$ была наименьшей



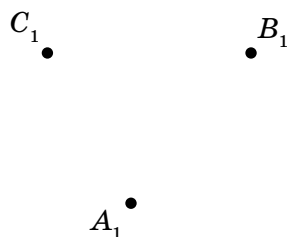
10) Постройте на прямой точку C так, чтобы разность $AC - CB$ была наибольшей



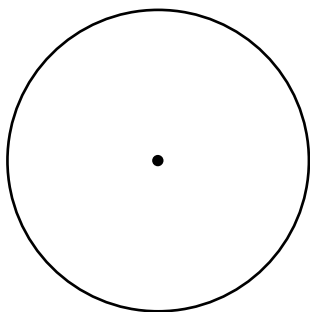
11) Постройте треугольник наименьшего периметра с вершиной в точке A , две другие вершины которого лежат на сторонах данного угла



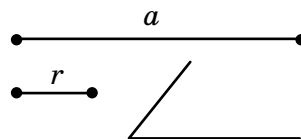
12) Постройте треугольник, если даны три точки, в которых вписанная окружность касается его сторон



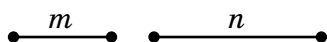
13) Опишите вокруг данной окружности равнобедренный прямоугольный треугольник



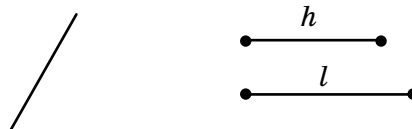
14) Постройте треугольник по стороне a , прилежащему к ней углу и радиусу вписанной окружности r



15) Постройте прямоугольный треугольник, если известны отрезки m и n , на которые высота к гипотенузе делит гипотенузу



16) Постройте треугольник по углу и высоте h и биссектрисе l , проведённым из вершины этого угла



ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Задание 4. 1) 6; 2) 6; 3) 15; 4) 11; 5) 15.

Задание 5. 1) 3; 3; 2) 4; 6; 3) 5; 10; 4) 10; 45; 5) 13; 65; 6) 80; 3160.

Задание 6. 1) 5; 2) 0; 3) 9; 4) 20; 5) 1080.

Задание 10. 1) 5; 15; 2) 4; 28; 3) 40; 4) 1; 5; 11; 17; 5) 4; 6; 12; 22; 6) 6; 24; 30; 7) 7; 8; 9; 10; 17; 19.

Задание 11. 1) 5; 10; 6) 1; 45; 7) A ; 9) C, D ; 10) $NK = 1$; $AP = \frac{4}{3}$; $MN = \frac{5}{3}$; 11) 10; 12) 4; 12; 16;

13) 2; 9; 11; 21.

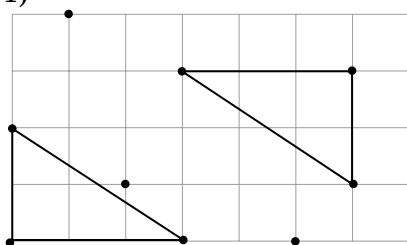
Задание 16Б. 1) 56° ; 2) 122° ; 3) 146° ; 4) 120° ; 5) 54° ; 6) 144° .

ТРЕУГОЛЬНИКИ

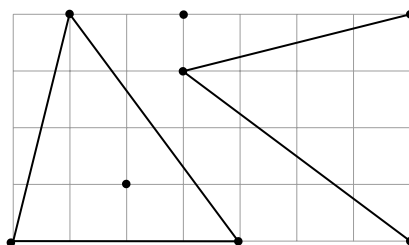
Задание 21. 1) $BC = 8$; 2) $AD = 7, DC = 8$; 3) $BM = 8, MO = 3$; 4) $BM = 6, BC = 5$; 5) 60° ; 6) 20° ; 7) 35° ; 8) 20° ; 9) 100° .

Задание 22А. 1) $\triangle ABD = \triangle CBD$; 2) $\triangle ABD = \triangle ACE$; 3) $\triangle ABC = \triangle DCB$.

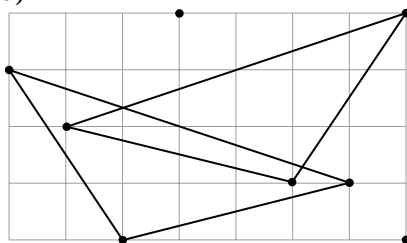
Задание 22Б. 1)



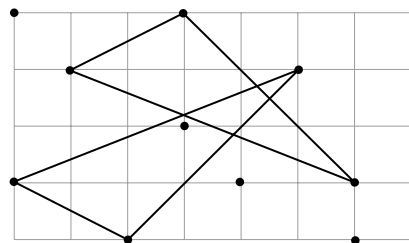
2)



3)



4)



Задание 28А. 1; 3; 4.

Задание 31. Указания: 5) центр окружности равноудалён от точек A и B , а значит O лежит на серединном перпендикуляре к AB ; 6) постройте ГМТ оснований медиан и оснований высот; 7) найдите ГМТ, находящихся на расстоянии d от данной прямой; 8) начните построение со стороны a и найдите ГМТ оснований стороны b и оснований высоты; 9) найдите положение середины хорды на стороне угла; 10) начните построение с угла и для каждой высоты найдите ГМТ оснований высоты.

Задание 32А. Примеры греческих букв, имеющих ось симметрии: $\Delta, \Sigma, \Theta, \Psi, \theta, \psi, \Xi, \Omega$.

Задание 32В. Указание: постройте треугольник с данным углом и сторонами a и d , а затем проведите серединный перпендикуляр к получившейся третьей стороне.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Задание 34. Указания: 6, 7) используйте свойство биссектрис односторонних углов при параллельных прямых; 9, 10) через вершину искомого угла проведите прямую, параллельную a и b .

Задание 35. 1) 67° ; 2) 130° ; 3) 90° ; 4) 70° ; 5) 45° ; 6) 120° ; 7) 60° ; 8) 50° ; 9) 90° .

Задание 36. 1) 40° ; 2) 35° .

Задание 37. 1) 70° ; 2) 120° ; 3) 55° ; 4) 30° ; 5) 20° ; 6) 35° ; 7) 40° ; 8) 40° ; 9) 40° ; 10) 50° ; 11) 45° ; 12) 18° ; 13) 50° ; 14) 34° ; 15) 50° ; 16) 5° .

Задание 39. 1) 36° ; 2) 60° ; 3) $22,5^\circ$; 4) 100° ; 5) 72° .

Задание 41. 1) 21, от 4 до 24; 2) 4, от 89 до 93; 3) 29, от 2 до 30; 4) 15, от 1 до 15; 5) 131, от 12 до 142.

- Задание 42.** Указания: 4) докажите, используя свойство внешнего угла треугольника, что $\angle MLN > \angle MNL$; 6) рассмотрите $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$; 7) докажите, что в $\triangle AOD$ $\angle AOD$ – наибольший, для этого рассмотрите $\triangle ABO$ и $\triangle DCO$.
- Задание 43.** Указания: 1) рассмотрите симметрию относительно CF ; 2) проведите через точку D прямую, параллельную основанию треугольника; 3) постройте точку, симметричную точке P относительно прямой AB ; 4) отразите точку P относительно AB , а затем повторите эту операцию второй раз для точки A и полученного образа прямой BP ; 5) постройте точки, симметричные точке A относительно OC и OB .
- Задание 44.** 1) достаточно; 2) достаточно; 3) необходимо и достаточно; 4) необходимо и достаточно; 5) достаточно; 6) необходимо.
- Задание 45А.** 1) 134° ; 2) нет; 3) 2; 4) 73° ; 5) да.
- Задание 45Б.** Указание: 1) длина диаметра равна сумме длин двух радиусов; 2) постройте точку, симметричную точке D относительно AC .
- Задание 46.** 1) 6; 2) 25° ; 3) 35° ; 4) 53° ; 5) $67,5^\circ$; 6) 12; 7) 40° ; 8) 78° ; 9) 55° .
- Задание 49.** 1) 3; 2) 15° ; 3) 10; 4) 16; 5) 12; 6) 60° ; 7) 20° ; 8) 80° ; 9) 8; 10) 4, указание: достройте треугольник до равностороннего.
- Задание 50.** 1) 25° ; 2) 75° ; 3) 55° ; 4) 15° ; 5) 14; 6) 8; 7) 8, указание: проведите медиану $\triangle ALK$; 8) 15° , указание: проведите высоту CH в $\triangle ABC$ и медиану в $\triangle AHC$; 9) 15° ; 10) 15° , указание: проведите высоту BH и медиану HM ; 11) 105° , указание: проведите высоту BH ; 12) 30° , проведите высоту CH .
- Задание 51.** 1) 12; 2) 8; 3) 10; 4) 45° ; 5) 30° ; 6) 150° .
- Задание 54Б.** 1) 27° ; 2) 16; 3) 20° ; 4) 42° ; 5) 3° ; 6) 8.

ОКРУЖНОСТИ

- Задание 61.** 1) 58° ; 2) 124° ; 3) 30° ; 4) 132° ; 5) 74° ; 6) 72° ; 7) 152° ; 8) 72° ; 9) $19,5^\circ$; 10) $32,5^\circ$; 11) 28° ; 12) 19° .
- Задание 62.** 1) 10; 2) 18; 3) 20; 4) 30° ; 5) 10; 6) 7; 7) 50° ; 8) 40° ; 9) 100° ; 10) 140° ; 11) 50° ; 12) 10.
- Задание 63.** верные утверждения 1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 13; 15; 18; 19; 21; 22.
- Задание 68.** 1) 90° ; 2) 110° ; 3) 40° ; 4) 50° ; 5) 30° .
- Задание 69.** 1) 90° ; 2) 115° ; 3) 40° ; 4) 65° ; 5) 40° ; 6) 115° ; 7) 50° .
- Задание 70.** 1) 90° ; 2) $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$; 3) $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$
- Задание 71.** Указания: 1) докажите, что точка D равноудалена от стороны BC и прямой AC ; 2) докажите, что $BQ = AP$; 3) рассмотрите прямоугольный треугольник OBQ ; 4) докажите, что точки O, C, Q лежат на одной прямой; 5) выразите длины отрезков AN и BK через стороны треугольника и его полупериметр; 6) рассмотрите медиану прямоугольного треугольника BNQ , и докажите равенство треугольников NAF и BKF ; 7) точка P – центр вневписанной окружности $\triangle ABC$ со стороны AB ; 8) продлите BA за точку A и докажите, что точка K равноудалена от прямых BA и AD .
- Задание 72А.** 1) да; 2) 90° ; 3) нет; 4) $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$; 5) да, например в равнобедренном треугольнике; 6) 10; 7) да, например в равнобедренном треугольнике; 8) да; 9) нет (каждый угол этого треугольника вычисляется как разность 90° и половины угла исходного треугольника); 10) 0° или 90° .
- Задание 74.** Указания: 3) центр окружности удалён от сторон угла на расстояние r ; 4) центр окружности лежит на перпендикуляре к прямой, проходящем через B , и на серединном перпендикуляре к AB ; 6) радиус искомой окружности равен половине расстояния между параллельными прямыми; 7) найдите ГМТ центров окружностей данного радиуса, касающихся данной окружности; 9, 10) отразите точку B симметрично относительно прямой; 11) постройте точки, симметричные точке A относительно сторон угла; 12) центр вписанной окружности равноудалён от данных точек, а стороны искомого треугольника перпендикулярны радиусам вписанной окружности; 13) постройте отдельно угол в 45° ; 14) центр вписанной окружности находится на расстоянии r от сторон; 15) используйте тот факт, что центр описанной окружности прямоугольного треугольника лежит на середине его гипотенузы; 16) постройте угол, его биссектрису, и найдите ГМТ вершин, из которых проведена высота.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.....	4
Прямые. Отрезки. Расстояния между точками.....	4
Луч. Угол.....	11
ТРЕУГОЛЬНИКИ	14
Признаки равенства треугольников.....	14
Элементы треугольника. Равнобедренный треугольник.....	20
Осевая симметрия. Геометрическое место точек	28
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА	32
Свойства и признаки параллельных прямых.....	32
Углы треугольника. Неравенства треугольника	36
Прямоугольный треугольник	43
ОКРУЖНОСТИ	53
Обобщение начальных сведений об окружности и её элементах	53
Касательная к окружности	58
Окружность и треугольник.....	64
ПОВТОРЕНИЕ И ОБОБЩЕНИЕ. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ	72
ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ	77

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программ Adobe Reader версии не ниже 11-й либо Adobe Digital Editions версии не ниже 4.5 для платформ Windows, Mac OS, Android и iOS; экран 10"

Учебное электронное издание

Ниренбург Т. Л.

ГЕОМЕТРИЯ

7 класс

Тетрадь-тренажёр

Углублённый уровень

Учебное пособие

Генеральный директор

М. Б. Миндюк

Редактор Д. П. Локтионов

Художественный редактор Е. Ю. Воробьёва

Компьютерная верстка и макет Е. В. Лупенко

Корректор М. Н. Локтионова

Подписано к использованию 03.10.25

Формат 18,5×28,0 см

Гарнитура SchoolBook

Издательство «Интеллект-Центр»

125445, Москва, ул. Смольная, 24А, этаж 6, ком. 24

Тел.: (495) 660-34-53

Сайт: <https://www.intellectcentre.ru/>

Эл. почта: intellect@izentr.ru

Электронное издание данной книги подготовлено

Агентством электронных изданий «Интермедиатор»

Сайт: <https://www.intermediator.ru>

Телефон: (495) 587-74-81

Эл. почта: info@intermediator.ru

Издательство «Интеллект-Центр»

- Учебные материалы для подготовки к ЕГЭ, ОГЭ и Всероссийским Проверочным Работам
- Практикумы и дидактические материалы
- Сборники тестовых заданий
- Материалы для развития интеллектуальных способностей
- Учебные пособия, реализующие современные технологии в обучении и контроле знаний учащихся

■ **Покупайте наши пособия
в электронном формате
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru**



Издательство «Интеллект-Центр»

тел./факс: + 7 (495) 660-34-53

Ждём Ваших писем: 125445, г. Москва, ул. Смольная, д. 24А,

этаж 6, ком. 24 | e-mail: intellect@izentr.ru

www.intellectcentre.ru | vk.com/intellektcentre | t.me/izentr